¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

Análisis vectorial

Schaum

2ª EDICIÓN

Murray R. Spiegel • Seymour Lipschutz • Dennis Spellman

480 PROBLEMAS RESUELTOS

REVISIÓN COMPLETA DE TODOS LOS FUNDAMENTOS DEL CURSO

TEORÍAS, CONCEPTOS Y DEFINICIONES, CON INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS TENSORIAL

Utilícelo en las siguientes asignaturas:

- ELECTROMAGNETISMO
- TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
- MECÁNICA
- AERODINÁMICA



ANÁLISIS VECTORIAL

ANÁLISIS VECTORIAL

Segunda edición

Murray R. Spiegel
Profesor y catedrático, Departamento de Matemáticas, Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford Graduate Center

Seymour Lipschutz
Departamento de Matemáticas, Temple University

Dennis Spellman
Departamento de Matemáticas, Temple University

Revisión técnica:

Víctor Hugo Ibarra
Universidad Anáhuac del Norte

José Luis López Estrada
Instituto Politécnico Nacional



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SÃO PAULO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: María Teresa Zapata Terrazas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductor: Javier Enríquez Brito

ANÁLISIS VECTORIAL
Segunda edición



ISBN: 978-607-15-0550-7
(ISBN edición anterior: 970-10-2096-0)

Traducido de la segunda edición de *Vector Analysis* by Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, and Dennis Spellman, published by The McGraw-Hill Companies, Inc. Copyright © 2009, All rights reserved.
978-0-07-161545-7

1234567890 1098765432101

Impreso en México *Printed in Mexico*

Acerca de los autores

SEYMOUR LIPSCHUTZ forma parte de Temple University, y antes perteneció al Polytechnic Institute of Brooklyn. Obtuvo su doctorado en New York University y es uno de los autores más prolíficos de la Serie Schaum's. Entre los libros que ha escrito tienen especial importancia *Álgebra Lineal*, *Probabilidad*, *Matemáticas Discretas*, *Teoría de Conjuntos*, *Matemáticas Finitas* y *Topología General*.

DENNIS SPELLMAN es integrante de Temple University y fue profesor en la Universidad del Este, en Venezuela. Obtuvo su doctorado en New York University, donde escribió su tesis bajo la dirección de Wilhelm Magnus. Es autor de más de 25 artículos publicados en revistas de matemáticas puras y aplicadas.

En su etapa de madurez profesional, MURRAY R. SPIEGEL obtuvo el grado de maestría en Física y de doctorado en Matemáticas en Cornell University. Laboró en universidades como Harvard, Columbia, Oak Ridge y Rensselaer Polytechnic Institute, y fue consultor en matemáticas en varias empresas importantes. Su último puesto fue como profesor y director de Matemáticas en su centro para graduados de Hartford en Rensselaer Polytechnic Institute. Aunque tiene interés en la mayor parte de las ramas de las matemáticas, le interesan en especial las que involucran problemas de aplicación en física e ingeniería. Es autor de numerosos artículos publicados en revistas, así como de 14 libros acerca de distintos temas de las matemáticas.

Prefacio

El propósito principal de esta edición es en esencia el mismo que el de la primera, con los cambios que se mencionan a continuación. Primero citaremos partes del prefacio escrito por Murray R. Spiegel para la primera edición del libro:

"Este libro está diseñado para emplearse como libro de texto en un curso formal de análisis vectorial o como complemento útil de varios libros actuales de uso común."

"Cada capítulo comienza con el enunciado claro de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, así como con ilustraciones y otros materiales descriptivos. Esto va seguido de grupos de problemas resueltos y propuestos en orden creciente de dificultad… Con los problemas resueltos se incluyen numerosas pruebas de teoremas y la obtención de fórmulas. La gran cantidad de problemas propuestos con respuestas, sirve como material de revisión completa de cada capítulo."

"Los temas cubiertos incluyen álgebra y cálculo diferencial e integral con vectores, los teoremas de Stokes, divergencia y otros del cálculo integral, así como muchas aplicaciones procedentes de distintos campos. Las características agregadas son los capítulos sobre coordenadas curvilíneas y el análisis tensorial…"

"En el texto se ha incluido una cantidad considerablemente mayor de la que puede cubrirse en la mayoría de cursos de los niveles iniciales. Esto se ha hecho con la intención de que el libro sea más flexible y útil como referencia y para estimular la profundización en los temas."

Algunos de los cambios realizados a la primera edición son los siguientes: *a*) Muchas secciones se ampliaron a fin de que fueran más accesibles para los lectores, *b*) nuevo formato, por ejemplo: el número de cada capítulo está incluido en las leyendas de todos los problemas y figuras, *c*) muchos de los resultados se plantean ahora de manera formal como Proposiciones y Teoremas, y *d*) se agregaron materiales nuevos tales como el análisis de la dependencia e independencia lineales, y el estudio de R^n como espacio vectorial.

Por último, expresamos nuestra gratitud al equipo de McGraw-Hill, en particular a Charles Wall, por su excelente cooperación en todas las etapas de la preparación de esta segunda edición.

Seymour Lipschutz
Dennis Spellman
Temple University

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

Vectores y escalares

1.1 INTRODUCCIÓN

Los elementos fundamentales del análisis vectorial son los vectores y los escalares. Usaremos la notación **R** para denotar la recta numérica que se asocia con el conjunto de números reales, $\mathbf{R}^2$ para denotar el plano cartesiano y $\mathbf{R}^3$ para el espacio ordinario en tres dimensiones.

Vectores

Hay cantidades en física y otras ciencias que se caracterizan por tener magnitud y dirección, tales como el desplazamiento, velocidad, fuerza y aceleración. Para describir dichas cantidades definimos el concepto de *vector* como el segmento de recta $\overrightarrow{PQ}$ que va de un punto P a otro punto Q. Aquí se llama a P el *punto inicial* u *origen* de $\overrightarrow{PQ}$ y Q se denomina *punto terminal*, *fin* o *término* del vector.

Denotaremos los vectores con letras escritas en negritas, o con letras con una flecha sobre ellas. Así, el vector $\overrightarrow{PQ}$ puede denotarse con **A** o con $\vec{A}$, como en la figura 1-1*a*). La magnitud o longitud del vector se denota con $|\overrightarrow{PQ}|$, $|\mathbf{A}|$, $|\vec{A}|$ o A.

Se aplica lo siguiente:

a) Dos vectores **A** y **B** son *iguales* si tienen la misma magnitud y dirección, sin que importe su punto inicial. Así, en la figura 1-1*a*), $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
b) Un vector que tenga dirección opuesta a la de otro vector dado, **A**, pero con la misma magnitud, se denota por medio de $-\mathbf{A}$ [vea la figura 1-1*b*)] y se denomina *negativo* de **A**.

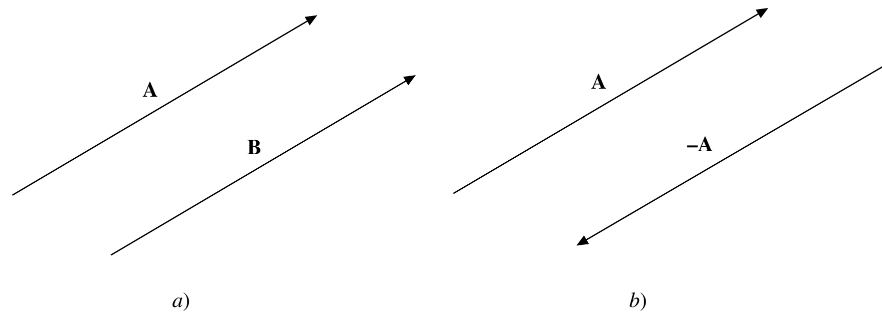


Figura 1-1

Escalares

Otras cantidades de la física y de las ciencias se caracterizan por tener sólo magnitud, por ejemplo, la masa, la longitud y la temperatura. Es frecuente llamar *escalares* a dichas cantidades para diferenciarlas de los vectores. Sin embargo, debe recalcarse que aparte de tener unidades tales como pies, grados, etc., los escalares no son más que números reales. Por eso es posible denotarlos con letras comunes. Los números reales 0 y 1 también forman parte del conjunto de escalares.

1.2 ÁLGEBRA VECTORIAL

Hay dos operaciones básicas con vectores: *a*) suma de vectores; *b*) multiplicación por un escalar.

a) Suma de vectores

Considere los vectores **A** y **B** que se ilustran en la figura 1-2*a*). La *suma* o *resultante* de **A** y **B** es el vector **C** que se forma cuando se coloca el punto inicial de **B** en el punto terminal de **A**, para luego unir el punto inicial de **A** con el punto terminal de **B**, como se ilustra en la figura 1-2*b*). La suma **C** se escribe **C** = **A** + **B**. Esta definición es equivalente a la ley del paralelogramo para la suma de vectores, como se observa en la figura 1-2*c*).

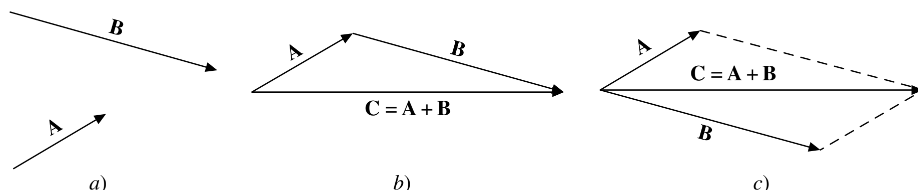


Figura 1-2

La extensión a sumas de más de dos vectores es inmediata. Por ejemplo, considere los vectores **A**, **B**, **C** y **D** de la figura 1-3*a*). En la figura 1-3*b*) se ilustra la forma de obtener la suma o resultante **E** de los vectores **A**, **B**, **C** y **D**, es decir, al conectar el final de cada vector con el principio del siguiente.

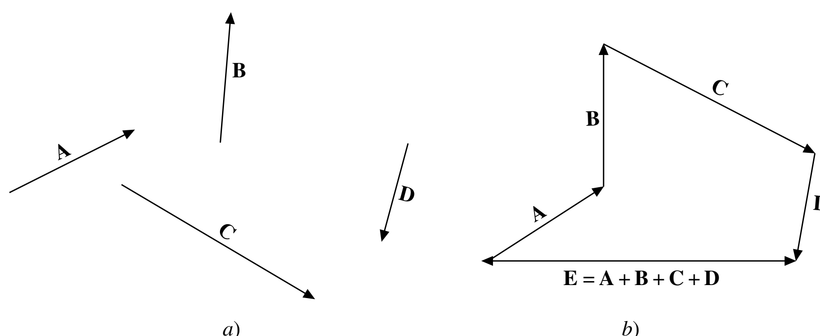


Figura 1-3

La *diferencia* de los vectores **A** y **B** se denota con **A** − **B**, es aquel vector **C** que al ser sumado a **B** da como resultado el vector **A**. De manera equivalente, **A** − **B** puede definirse como **A** + (−**B**).

Si **A** = **B**, entonces **A** − **B** se define como el vector *nulo* o *cero* y se representa con el símbolo **0** o 0. Tiene magnitud igual a cero y su dirección no está definida. Un vector que no sea nulo es un vector *propio*. Supondremos que todos los vectores son propios a menos que se especifique otro caso.

b) Multiplicación por un escalar

La multiplicación de un vector **A** por un escalar m produce un vector m**A** con magnitud $|m|$ veces la magnitud de **A** y la dirección de m**A** está en la misma de **A** o es opuesta a ella, según sea m positivo o negativo. Si $m = 0$, entonces m**A** = **0**, que es el vector nulo.

Leyes del álgebra vectorial

El teorema siguiente es válido:

TEOREMA 1.1: Suponga que **A**, **B** y **C** son vectores y m y n son escalares. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

[$\mathbf{A}_1$] $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ — Ley asociativa para la suma

[$\mathbf{A}_2$] Existe un vector cero, **0**, tal que para todo vector **A**,

$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$ — Existencia del elemento cero

[$\mathbf{A}_3$] Para todo vector **A**, existe un vector $-\mathbf{A}$ tal que

$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}$ — Existencia de los negativos

[$\mathbf{A}_4$] $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ — Ley conmutativa para la suma

[$\mathbf{M}_1$] $m(\mathbf{A}+\mathbf{B})=m\mathbf{A}+m\mathbf{B}$ — Ley distributiva

[$\mathbf{M}_2$] $(m+n)\mathbf{A}=m\mathbf{A}+n\mathbf{A}$ — Ley distributiva

[$\mathbf{M}_3$] $m(n\mathbf{A})=(mn)\mathbf{A}$ — Ley asociativa

[$\mathbf{M}_4$] $1(\mathbf{A})=\mathbf{A}$ — Multiplicación por la unidad

Las ocho leyes anteriores son los axiomas que definen una estructura abstracta llamada *espacio vectorial*.

Dichas leyes se agrupan en dos conjuntos, indicados por sus leyendas. Las primeras cuatro leyes se refieren a la suma de vectores. Con ellas es posible demostrar las propiedades siguientes de la suma de vectores.

a) Cualquier suma $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\cdots+\mathbf{A}_n$ de vectores no requiere de paréntesis y no depende del orden de los sumandos.
b) El vector cero, **0**, es único y el negativo, $-\mathbf{A}$, de un vector **A** es único.
c) (Ley de cancelación). Si $\mathbf{A}+\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$, entonces $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

Las cuatro leyes restantes se refieren a la multiplicación por un escalar. Con su empleo se demuestran las propiedades siguientes.

PROPOSICIÓN 1.2:
a) Para cualquier escalar m y el vector cero, **0**, se cumple que $m\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
b) Para cualquier vector **A** y el escalar 0, se cumple que $0\mathbf{A}=\mathbf{0}$.
c) Si $m\mathbf{A}=\mathbf{0}$, entonces $m=0$ o $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.
d) Para cualquier vector **A** y un escalar m, se cumple que $(-m)\mathbf{A}=m(-\mathbf{A})=-(m\mathbf{A})$.

1.3 VECTORES UNITARIOS

Los *vectores unitarios* son aquellos que tienen una longitud igual a uno. Suponga que **A** es un vector cualquiera con longitud $|\mathbf{A}|>0$. Entonces $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ es un vector unitario, denotado por **a**, que tiene la misma dirección que **A**. Asimismo, cualquier vector **A** puede representarse con un vector unitario **a** en la dirección de **A** multiplicado por la magnitud de **A**. Es decir, $\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{a}$.

EJEMPLO 1.1 Suponga que $|\mathbf{A}|=3$. Entonces $\mathbf{a}=|\mathbf{A}|/3$ es un vector unitario en la dirección de **A**. También se cumple que $\mathbf{A}=3\mathbf{a}$.

1.4 LOS VECTORES UNITARIOS RECTANGULARES: i, j, k

Un conjunto importante de vectores unitarios, denotados por **i**, **j** y **k**, son aquellos que tienen las direcciones de los ejes x, y y z, respectivamente, de un sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones. [Vea la figura 1-4*a*).]

El sistema de coordenadas que se ilustra en la figura 1-4*a*), que será el que usemos a menos que se especifique otro caso, se denomina *sistema de coordenadas de la mano derecha*. El sistema se caracteriza por la siguiente propiedad: si doblamos los dedos de la mano derecha con un giro de 90° a partir del eje positivo de las x y hacia el eje y positivo, entonces el pulgar apuntará en la dirección del eje positivo de las z.

En general, suponga que los vectores **A**, **B** y **C**, distintos de cero, tienen el mismo punto inicial y no están contenidos en el mismo plano. Entonces, se dice que **A**, **B** y **C** forman un *sistema de mano derecha* o *sistema diestro*, como un tornillo con rosca derecha que gira en un ángulo menor que 180° de **A** a **B** y avanza en la dirección de **C**, como se ilustra en la figura 1-4*b*).

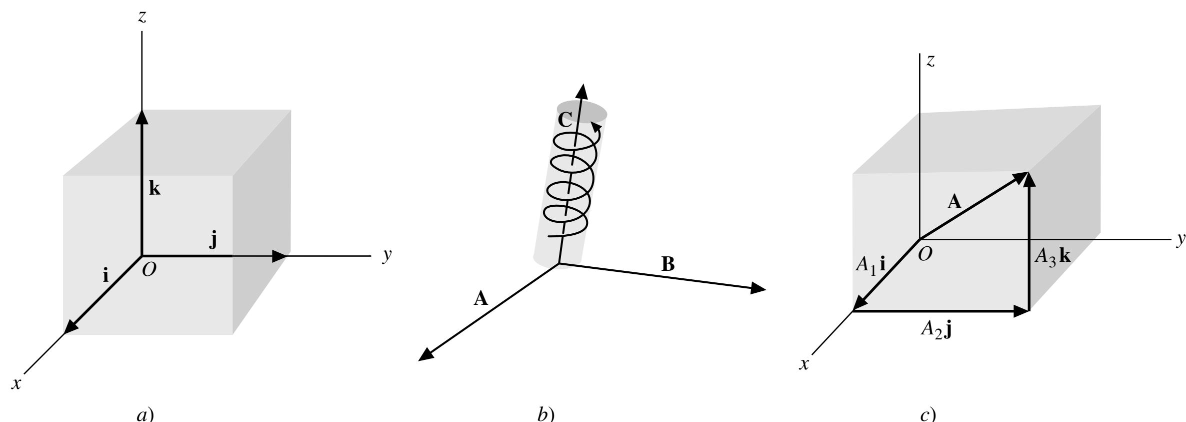


Figura 1-4

Componentes de un vector

Cualquier vector **A** en tres dimensiones puede representarse con su punto inicial en el origen $O = (0, 0, 0)$ y su punto final en otro punto distinto, digamos (A_1, A_2, A_3). Entonces, los vectores $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ se llaman *vectores componentes* de **A** en las direcciones x, y y z, y los escalares A_1, A_2 y A_3 se denominan *componentes* de **A** en las direcciones x, y y z, respectivamente. [(Vea la figura 1-4*c*).]

La suma de $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ y $A_3\mathbf{k}$ es el vector **A**, por lo que puede escribirse lo siguiente:

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

La magnitud de **A** es:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Considere un punto P(x, y, z) en el espacio. El vector **r** que parte del origen O hacia el punto P se llama vector *de posición* (o *radio* vector). Entonces, podemos escribir **r** como sigue:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Su magnitud es: $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Se cumple la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.3: Suponga que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Entonces,

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}$
ii) $m\mathbf{A} = m(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) = (mA_1)\mathbf{i} + (mA_2)\mathbf{j} + (mA_3)\mathbf{k}$

EJEMPLO 1.2 Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

a) Para encontrar $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, se suman las componentes respectivas y se obtiene $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

b) A fin de calcular $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, primero se multiplica por los escalares y después se suma:

$$3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = (9\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (-8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 14\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 31\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

c) Para calcular $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$, se extrae la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38} \text{ y } |\mathbf{B}| = \sqrt{16 + 64 + 49} = \sqrt{129}$$

1.5 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Suponga que se dan los vectores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ …, $\mathbf{A}_n$ y los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces podemos multiplicar los vectores por los escalares correspondientes y luego sumar los productos correspondientes para formar el vector

$$\mathbf{B} = a_1\mathbf{A}_1 + a_2\mathbf{A}_2 + \cdots + a_n\mathbf{A}_n$$

Dicho vector **B** se denomina *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

Se aplica la definición siguiente:

DEFINICIÓN Los vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ son *linealmente dependientes* si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, distintos de cero, tales que

$$a_1\mathbf{A}_1 + a_2\mathbf{A}_2 + \cdots + a_n\mathbf{A}_n = \mathbf{0}$$

En caso contrario, los vectores son *linealmente independientes.*

La definición anterior puede replantearse como sigue. Considere la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{0}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son escalares desconocidos. Esta ecuación siempre tiene la solución cero: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si ésta es la única solución, los vectores son linealmente independientes. Si hay una solución con algún valor $x_j \neq 0$, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Suponga que **A** no es el vector nulo. Entonces **A**, en sí mismo, es linealmente independiente, ya que

$$m\mathbf{A} = 0 \text{ y } \mathbf{A} \neq 0, \text{ implica que } m = 0$$

Se cumple la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 1.4: Dos o más vectores son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es una combinación lineal de los otros.

COROLARIO 1.5: Los vectores **A** y **B** son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo del otro.

EJEMPLO 1.3

a) Los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, son linealmente independientes, ya que ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros dos.

b) Suponga que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = a'\mathbf{A} + b'\mathbf{B} + c'\mathbf{C}$, donde **A**, **B** y **C** son linealmente independientes. Entonces $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

1.6 CAMPO ESCALAR

Suponga que a cada punto (x, y, z) de una región D en el espacio le corresponde un número (escalar) $\phi(x, y, z)$. Entonces ϕ se denomina *función escalar de posición*, y decimos que se ha definido un *campo escalar* ϕ sobre D.

EJEMPLO 1.4

a) La temperatura en cualquier punto dentro o sobre la superficie de la Tierra en un momento determinado, define un campo escalar.

b) La función $\phi(x, y, z) = x^3y - z^2$ define un campo escalar. Considere el punto P(2, 3, 1). Entonces $\phi(\text{P}) = 8(3) - 1 = 23$.

Un campo escalar ϕ que es independiente del tiempo se llama *campo escalar estacionario* o *de estado estable*.

1.7 CAMPO VECTORIAL

Suponga que a cada punto (x, y, z) de una región D en el espacio, le corresponde un vector $\mathbf{V}(x, y, z)$. Entonces **V** se llama *función vectorial de posición*, y decimos que se ha definido un *campo vectorial* **V** sobre D.

EJEMPLO 1.5

a) Suponga que se conoce la velocidad que tiene en un momento dado cualquier punto dentro de un fluido en movimiento. Entonces, se ha definido un campo vectorial.

b) La función $\mathbf{V}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ define un campo vectorial. Considere el punto P(2, 3, 1). Entonces, $\mathbf{V}(P) = 18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Un campo vectorial **V** que sea independiente del tiempo se llama *campo vectorial estacionario* o *de estado estable*.

1.8 ESPACIO VECTORIAL $\mathbf{R}^n$

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$, donde $\mathbf{R}^n$ consiste en todas las sucesiones de n elementos $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales llamados componentes de **u**. Se usa el término *vector* para los elementos de **V** y los denotamos con el uso de las letras **u**, **v** y **w**, con o sin subíndice. A los números reales los llamamos *escalares* y los denotamos con letras distintas de **u**, **v** o **w**.

Definimos dos operaciones sobre $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$:

a) Suma de vectores

Dados los vectores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en **V**, se define la suma vectorial $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ como sigue:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Es decir, se suman las componentes que corresponden a los vectores.

b) Multiplicación por un escalar

Dado un vector $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y un escalar k en **R**, se define el producto por un escalar k**u** así:

$$k\mathbf{u} = (ka_1,\ ka_2, \ldots, ka_n)$$

Es decir, se multiplica cada componente de **u** por el escalar **k**.

PROPOSICIÓN 1.6: $\mathbf{V} = \mathbf{R}^n$ satisface los ocho axiomas de un espacio vectorial que se listan en el teorema 1.1.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Diga cuáles de los siguientes son escalares y cuáles son vectores:

a) calor específico, *b*) momento, *c*) distancia, *d*) rapidez, *e*) intensidad de campo magnético

Solución

a) escalar, *b*) vector, *c*) escalar, *d*) escalar, *e*) vector

1.2. Represente en forma gráfica: *a*) una fuerza de 10 lb con dirección 30° al noreste,
b) una fuerza de 15 lb con dirección 30° al este del norte.

Solución

Al elegir la unidad de magnitud que se muestra, los vectores requeridos son los indicados en la figura 1-5.

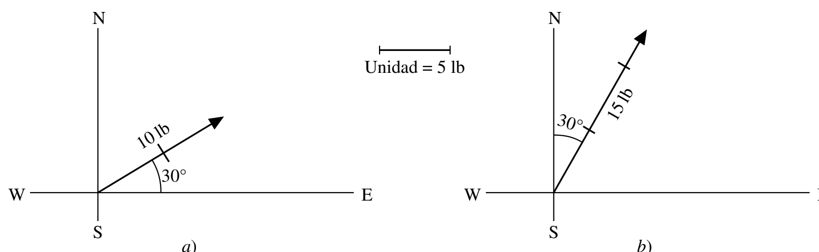


Figura 1-5

1.3. Un automóvil viaja 3 millas hacia el norte, luego 5 millas hacia el noreste. Represente estos desplazamientos en forma gráfica y determine el desplazamiento resultante: *a*) en forma gráfica y *b*) analíticamente.

Solución

La figura 1-6 presenta los desplazamientos requeridos.
El vector **OP** o **A** representa el desplazamiento de 3 millas hacia el norte.
El vector **PQ** o **B** representa el desplazamiento de 5 millas hacia el noreste.
El vector **OQ** o **C** representa el desplazamiento resultante o suma de vectores **A** y **B**, es decir **C** = **A** + **B**. Ésta es la *ley del triángulo* para la suma de vectores.

El vector resultante **OQ** también puede obtenerse con la construcción de la diagonal del paralelogramo *OPQR* que tiene como lados a los vectores **OP** = **A** y a **OR** (igual al vector **PQ** o **B**). Es la *ley del paralelogramo* para la suma de vectores.

a) *Determinación gráfica de la resultante.* Trace la unidad de 1 milla para el vector **OQ** a fin de encontrar la magnitud de 7.4 millas (aproximadamente). Con un transportador se lee el ángulo $EOQ = 61.5°$, aproximadamente. Entonces, el vector **OQ** tiene una magnitud de 7.4 millas y dirección 61.5° hacia el noreste.

b) *Determinación analítica de la resultante*. Del triángulo *OPQ*, con la notación A, B y C para las magnitudes de **A**, **B** y **C**, obtenemos lo siguiente, por la ley de los cosenos:

$$\mathrm{C}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB}\cos\angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55.21$$

y C = 7.43 (aproximadamente).

$$\text{Por la ley de los senos, } \frac{\mathrm{A}}{\operatorname{sen}\angle OQP} = \frac{\mathrm{C}}{\operatorname{sen}\angle OPQ}. \text{ Entonces,}$$

$$\operatorname{sen}\angle OQP = \frac{\mathrm{A}\operatorname{sen}\angle OPQ}{\mathrm{C}} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \text{ y } \angle OQP = 16°35'.$$

Así, el vector **OQ** tiene una magnitud de 7.43 millas y dirección (45° + 16°35′) = 61°35′ hacia el noreste.

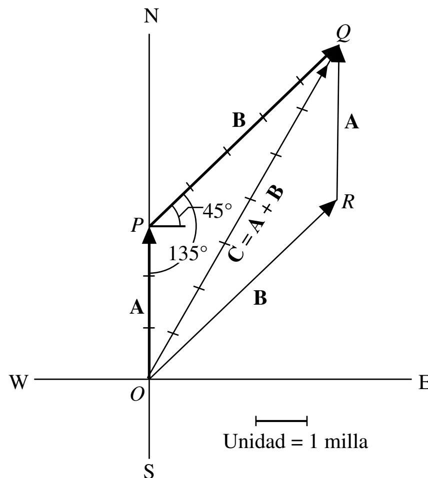


Figura 1-6

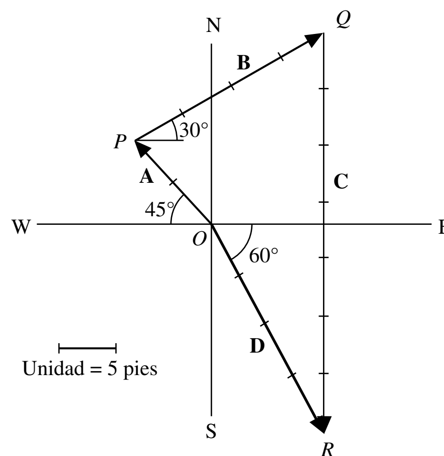


Figura 1-7

1.4. Encuentre la suma (resultante) de los desplazamientos siguientes:

A: 10 pies al noroeste, **B**: 20 pies, 30° al noreste, **C**: 35 pies hacia el sur.

Solución

La figura 1-7 muestra la resultante obtenida como sigue (donde una unidad de longitud es igual a 5 pies).

Sea que **A** comience en el origen. En el punto terminal de **A** se coloca el punto inicial de **B**. En el punto terminal de **B** se sitúa el punto inicial de **C**. La resultante **D** se forma al unir el punto inicial de **A** con el punto terminal

de **C**, es decir **D** = **A** + **B** + **C**. En forma gráfica, la resultante **D** se mide y resulta tener una magnitud de 4.1 unidades = 20.5 pies con dirección 60° al sureste.

1.5. Demuestre que la adición de vectores es conmutativa, es decir, que **A** + **B** = **B** + **A** (teorema 1.1[$\mathbf{A_4}$]).

Solución

Como se aprecia en la figura 1-8,

$$OP + PQ = OQ, \text{ o bien } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ y } OR + RQ = OQ, \text{ o bien } \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

Por tanto, **A** + **B** = **B** + **A**.

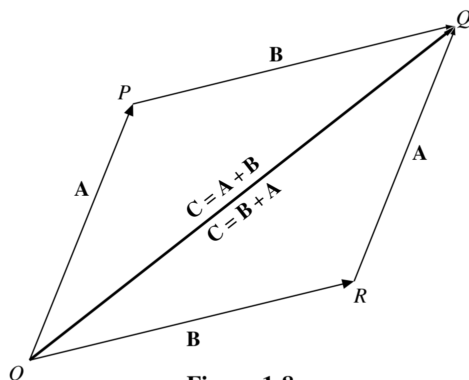


Figura 1-8

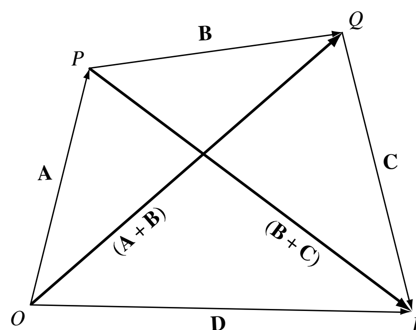


Figura 1-9

1.6. Demuestre que la adición de vectores es asociativa, es decir, **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C** (teorema 1.1[$\mathbf{A_1}$]).

Solución

Como se indica en la figura 1-9,

$$OP + PQ = OQ = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad \text{y} \quad PQ + QR = PR = (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$
$$OP + PR = OR = \mathbf{D} \text{ o } \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D} \quad \text{y} \quad OQ + QR = OR = \mathbf{D} \text{ o } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

Así, **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**.

1.7. Las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_6$ actúan sobre un objeto *P*, como se ilustra en la figura 1-10*a*). Calcule la fuerza que se necesita para impedir que *P* se mueva.

Solución

Como el orden de la suma de vectores es irrelevante, podemos comenzar con cualquier vector, digamos $\mathbf{F}_1$. A $\mathbf{F}_1$ hay que sumarle $\mathbf{F}_2$, luego $\mathbf{F}_3$ y así sucesivamente, como se ilustra en la figura 1-10*b*). El vector que se dibuje a partir del punto inicial de **F**1 hasta el punto terminal de $\mathbf{F}_6$ es la resultante **R**, es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_6$.

La fuerza necesaria para impedir que *P* se mueva es −**R**, que a veces recibe el nombre de *equilibrante*.

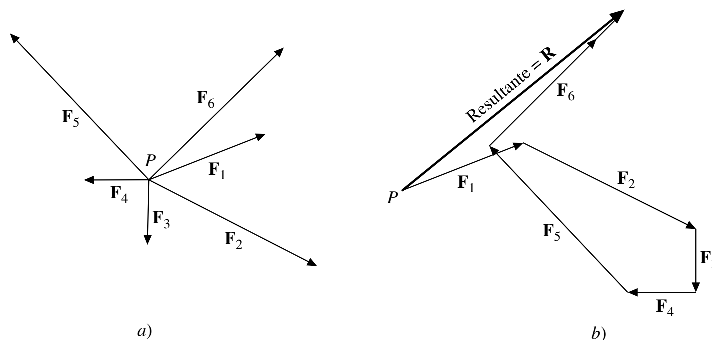


Figura 1-10

1.8. Dados los vectores **A**, **B** y **C** en la figura 1-11*a*), construya **A** − **B** + 2**C**.

Solución

Se comienza con **A**, se suma −**B** y después se suma 2**C**, como se observa en la figura 1-11*b*). La resultante es **A** − **B** + 2**C**.

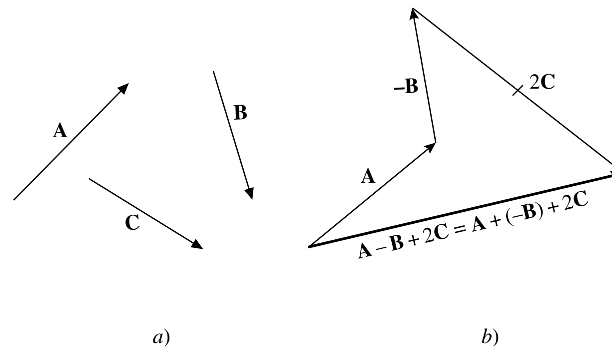


Figura 1-11

1.9. Dados dos vectores no colineales **a** y **b**, como los que aparecen en la figura 1-12, encuentre una expresión para cualquier vector **r** que esté en el plano que determinan **a** y **b**.

Solución

Los vectores no colineales son aquellos que no son paralelos a la misma línea. De ahí que cuando sus puntos iniciales coinciden, determinan un plano. Sea **r** cualquier vector contenido en el plano de **a** y **b** y cuyo punto inicial coincide con los puntos iniciales de **a** y **b** en *O*. A partir del punto terminal *R* de **r**, se construyen líneas paralelas a los vectores **a** y **b** para completar el paralelogramo *ODRC* por extensión de las líneas de acción de **a** y **b**, si fuera necesario. De la figura 1-12,

$$\mathbf{OD} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}, \text{ donde } x \text{ es un escalar}$$
$$\mathbf{OC} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}, \text{ donde } y \text{ es un escalar}$$

Pero según la ley del paralelogramo de la suma de vectores:

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OD} + \mathbf{OC}, \text{ o bien } \mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

que es la expresión requerida. Los vectores x**a** y y**b** se llaman *vectores componentes* de **r** en las direcciones **a** y **b**, respectivamente. Los escalares x y y pueden ser positivos o negativos en función de las orientaciones relativas de los vectores. De acuerdo con la forma de construirlos, es evidente que x y y son únicos para vectores **a**, **b** y **r** dados. Los vectores **a** y **b** se llaman *vectores base* en un plano.

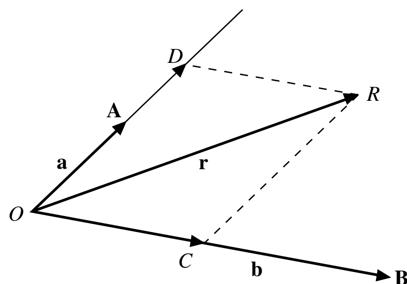


Figura 1-12

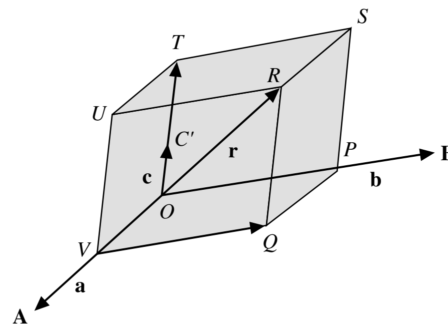


Figura 1-13

1.10. Dados tres vectores no coplanares **a**, **b** y **c**, encuentre una expresión para cualquier vector **r** en el espacio tridimensional.

Solución

Los vectores no coplanares son los que no son paralelos al mismo plano. Entonces, cuando sus puntos iniciales coinciden, no se localizan en el mismo plano.

Sea **r** cualquier vector en el espacio con su punto inicial coincidente con los puntos iniciales de **a**, **b** y **c** en O. A través del punto terminal de **r**, se pasan planos paralelos respectivos a los planos determinados por **a** y **b**, **b** y **c**, y **a** y **c**; consulte la figura 1-13. Complete el paralelepípedo *PQRSTUV* por extensión de las líneas de acción de **a**, **b** y **c**, si fuera necesario. De

$$\mathbf{OV} = x(\mathbf{OA}) = x\mathbf{a}, \quad \text{donde } x \text{ es un escalar}$$
$$\mathbf{OP} = y(\mathbf{OB}) = y\mathbf{b}, \quad \text{donde } y \text{ es un escalar}$$
$$\mathbf{OT} = x(\mathbf{OC}) = z\mathbf{c}, \quad \text{donde } z \text{ es un escalar.}$$

Pero $\mathbf{OR} = \mathbf{OV} + \mathbf{VQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OV} + \mathbf{OP} + \mathbf{OT}$, o bien $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

Por el método de construcción, es evidente que x, y y z son únicos para vectores dados **a**, **b**, **c** y **r**.

Los vectores $x\mathbf{a}$, $y\mathbf{b}$ y $z\mathbf{c}$ se llaman *vectores componentes* de **r** en las direcciones **a**, **b** y **c**, respectivamente. Los vectores **a**, **b** y **c** se denominan *vectores base* en tres dimensiones.

Como caso especial, si **a**, **b** y **c** son los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, que son mutuamente perpendiculares, se observa que cualquier vector **r** se puede expresar en forma única en términos de **i**, **j** y **k** por medio de la expresión $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Asimismo, si $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, entonces **r** debe estar en el plano de **a** y **b**, por lo que se obtiene el resultado del problema 1.9.

1.11. Suponga que **a** y **b** no son colineales. Demuestre que $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica que $x = y = 0$.

Solución

Suponga que $x \neq 0$. Entonces $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica que $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ o bien $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$, es decir, **a** y **b** deben ser paralelos a la misma línea (colineales) contrario a la hipótesis. Así, $x = 0$; entonces $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$, por lo que $y = 0$.

1.12. Suponga que $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$, donde **a** y **b** no son colineales. Demuestre que $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

Solución

Observe que $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}$ puede escribirse como

$$x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} - (x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \text{o bien} \quad (x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Entonces, según el problema 1.11, $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ o bien $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

1.13. Suponga que **a**, **b** y **c** no son coplanares. Demuestre que $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ implica que $x = y = z = 0$.

Solución

Suponga que $x \neq 0$. Entonces $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ implica que $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b} - z\mathbf{c}$ o $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$. Pero $-(y/x)\mathbf{b} - (z/x)\mathbf{c}$ es un vector que está en el plano de **b** y **c** (vea el problema 1.10); es decir, **a** está en el plano de **b** y **c**, lo que, con toda claridad, contradice la hipótesis de que **a**, **b** y **c** son no coplanares. Entonces, $x = 0$. Con un razonamiento similar se obtienen contradicciones si se supone que $y \neq 0$ y $z \neq 0$.

1.14. Suponga que $x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} + z_1\mathbf{c} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b} + z_2\mathbf{c}$, donde **a**, **b** y **c** son no coplanares. Demuestre que $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$.

Solución

La ecuación se puede escribir como $(x_1 - x_2)\mathbf{a} + (y_1 - y_2)\mathbf{b} + (z_1 - z_2)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Entonces, según el problema 1.13,

$$x_1 - x_2 = 0, y_1 - y_2 = 0, z_1 - z_2 = 0 \text{ o bien } x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

1.15. Suponga que los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero están conectados por líneas rectas. Demuestre que el cuadrilátero resultante es un paralelogramo.

Solución

Sea *ABCD* el cuadrilátero dado y *P*, *Q*, *R* y *S*, los puntos medios de sus lados. Consulte la figura 1-14.
Entonces, $\mathbf{PQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{QR} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{RS} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$, $\mathbf{SP} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a})$.
Pero $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Entonces

$$\mathbf{PQ} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{SR} \quad \text{y} \quad \mathbf{QR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a}) = \mathbf{PS}$$

Así, los lados opuestos son iguales y paralelos, por lo que *PQRS* es un paralelogramo.

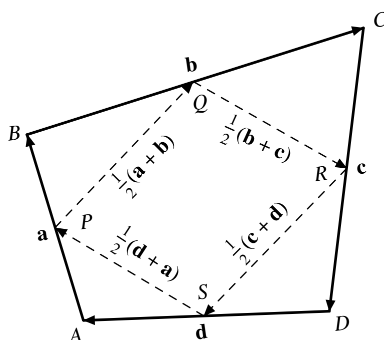


Figura 1-14

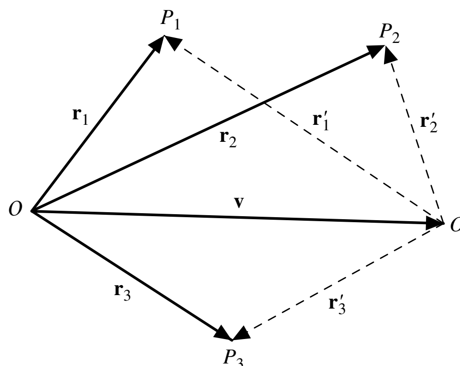


Figura 1-15

1.16. Sean P_1, P_2 y P_3 puntos fijos relativos a un origen *O*, y sean $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ vectores de posición que van de *O* a cada punto. Suponga que la ecuación vectorial $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$ se cumple con respecto al origen *O*. Demuestre que se cumplirá con respecto de cualquier punto O' distinto del origen si y sólo si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Solución

Sean $\mathbf{r}'_1$, $\mathbf{r}'_2$ y $\mathbf{r}'_3$ los vectores de posición de P_1, P_2 y P_3 con respecto de O', y sea $\mathbf{v}$ el vector de posición de O' con respecto de *O*. Se buscan condiciones en las que la ecuación $a_1\mathbf{r}'_1 + a_2\mathbf{r}'_2 + a_3\mathbf{r}'_3 = \mathbf{0}$ se cumplirá en el nuevo sistema de referencia.

De la figura 1-15, es evidente que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{r}'_1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{r}'_2$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{v} + \mathbf{r}'_3$ por lo que $a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$ se convierte en

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + a_3\mathbf{r}_3 &= a_1(\mathbf{v} + \mathbf{r}'_1) + a_2(\mathbf{v} + \mathbf{r}'_2) + a_3(\mathbf{v} + \mathbf{r}'_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)\mathbf{v} + a_1\mathbf{r}'_1 + a_2\mathbf{r}'_2 + a_3\mathbf{r}'_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

El resultado $a_1\mathbf{r}'_1 + a_2\mathbf{r}'_2 + a_3\mathbf{r}'_3 = \mathbf{0}$ se cumplirá si y sólo si

$$(a_1 + a_2 + a_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{o bien} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

El resultado puede generalizarse.

1.17. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan una a la otra.

Solución

Sea *ABCD* el paralelogramo dado con diagonales que se intersecan en *P*, como en la figura 1-16.
Como $\mathbf{BD} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Entonces $\mathbf{BP} = x(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Debido a que $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{AP} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
Pero $\mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{BP}$,
es decir, $\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}$.

Como **a** y **b** no son colineales, según el problema 1.12, $x + y = 1$ y $y - x = 0$ (entonces $x = y = \frac{1}{2}$) y P es el punto medio de ambas diagonales.

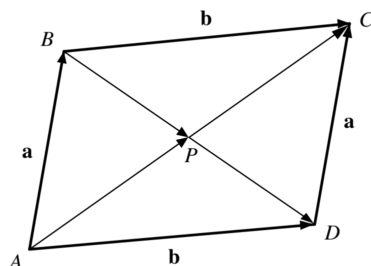


Figura 1-16

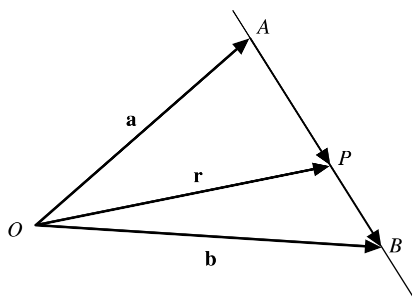


Figura 1-17

1.18. Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos dados A y B que tienen vectores de posición **a** y **b** con respecto del origen.

Solución

Sea **r** el vector de posición de un punto P sobre la recta que pasa por A y B, como se aprecia en la figura 1-17. Entonces,

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \mathbf{OP}, \text{ o bien } \mathbf{a} + \mathbf{AP} = \mathbf{r} \text{ (es decir, } \mathbf{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a})$$

y

$$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}, \text{ o bien } \mathbf{a} + \mathbf{AB} = \mathbf{b} \text{ (que es, } \mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Como **AP** y **AB** son colineales, $\mathbf{AP} = t\mathbf{AB}$ o bien $\mathbf{r} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Entonces, la ecuación requerida es

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ o bien } \mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Si la ecuación se escribe como $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} - \mathbf{r} = \mathbf{0}$, la suma de los coeficientes de **a**, **b** y **r** es $1 - t + t - 1 = 0$. Entonces, según el problema 18, se observa que el punto P siempre está sobre la recta que une a A y a B y no depende de la elección del origen O, que es como debe ser, por supuesto.

Otro método. Como **AP** y **PB** son colineales, se tiene que para los escalares m y n:

$$m\mathbf{AP} = n\mathbf{PB} \text{ o bien } m(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = n(\mathbf{b} - \mathbf{r})$$

Al resolver $\mathbf{r} = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b})/(m + n)$, que se llama *forma simétrica*.

1.19. Considere los puntos $P(2, 4, 3)$ y $Q(1, -5, 2)$ en el espacio $\mathbf{R}^3$ tridimensional, como se aprecia en la figura 1-18.

a) Encuentre los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ para P y Q en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.
b) Determine en forma gráfica y analítica la resultante de estos vectores de posición.

Solución

a) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BP} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_2 = \mathbf{OQ} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EQ} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

b) *En forma gráfica*, la resultante de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ se obtiene como la diagonal **OR** del paralelogramo *OPRQ*. *En forma analítica*, la resultante de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ está dada por

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

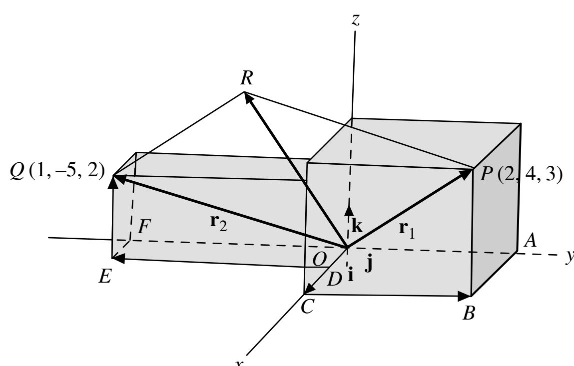


Figura 1-18

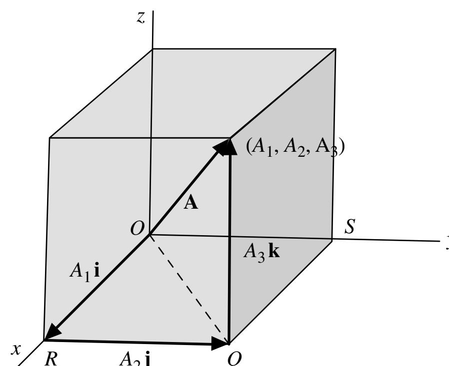


Figura 1-19

1.20. Demuestre que la magnitud del vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, que se ilustra en la figura 1-19 es $|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

Solución

Con el teorema de Pitágoras,

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

donde $\overline{OP}$ denota la magnitud del vector **OP**, y así sucesivamente. En forma similar $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.

Entonces $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ o bien $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ (es decir, $\mathbf{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$).

1.21. Dados los vectores de radios $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Encuentre las magnitudes de: *a*) $\mathbf{r}_3$, *b*) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, *c*) $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3$.

Solución

a) $|\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3.$

b) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, por lo que $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$

c) $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

1.22. Encuentre un vector unitario **u** paralelo a la resultante **R** de los vectores $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución

La resultante $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Asimismo,

$$\text{Magnitud de } \mathbf{R} = |\mathbf{R}| = |\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3.$$

Entonces, **u** es igual a $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$. Es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3 = (1/3)\mathbf{i} + (2/3)\mathbf{j} - (2/3)\mathbf{k}$$

Comprobación: $|(1/3)\mathbf{i} + (2/3)\mathbf{j} - (2/3)\mathbf{k}| = \sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2 + (-2/3)^2} = 1.$

1.23. Suponga que $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Escriba $\mathbf{r}_4 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como una combinación lineal de $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$; es decir, encuentre escalares a, b y c tales que $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$.

Solución

Se requiere que

$$\begin{aligned}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} &= a(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + c(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= (2a + b - 2c)\mathbf{i} + (-a + 3b + c)\mathbf{j} + (a - 2b - 3c)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ no son coplanares, según el problema 1.13, igualamos los coeficientes correspondientes a cada uno de estos vectores, con lo que se obtiene $2a + b - 2c = 1$, $-a + 3b + c = 3$, $a - 2b - 3c = 2$
Al resolver se obtiene: $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$. Entonces, $\mathbf{r}_4 = -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3$.

Se dice que el vector $\mathbf{r}_4$ es *linealmente dependiente* de $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$; en otras palabras $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$ constituyen un conjunto de vectores *linealmente dependiente*. Por otro lado, cualesquiera tres (o menos) de esos vectores son *linealmente independientes*.

1.24. Determine el vector con punto inicial en $P(x_1, y_1, z_1)$ y punto terminal en $Q(x_2, y_2, z_2)$ y encuentre su magnitud.

Solución

Considere la figura 1-20. Los vectores de posición de P y Q son, respectivamente,

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$$

Entonces, $\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$, o bien

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

La magnitud de $\mathbf{PQ} = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Observe que ésta es la distancia entre los puntos P y Q.

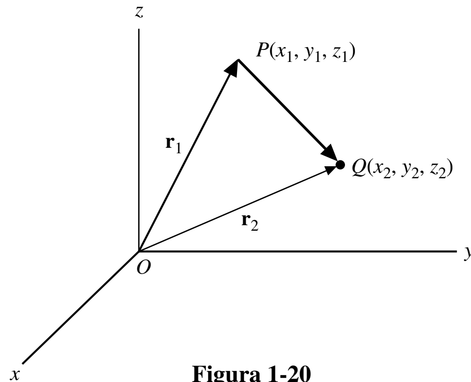


Figura 1-20

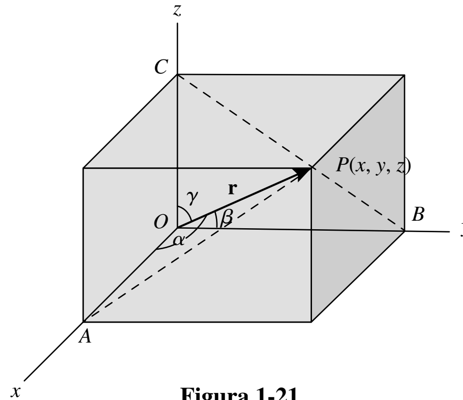


Figura 1-21

1.25. Determine los ángulos α, β y γ que el vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados, y demuestre que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Solución

En relación con la figura 1-21, el triángulo OAP es rectángulo con su ángulo recto en A; entonces, $\cos\alpha = x/|\mathbf{r}|$. En forma similar, los triángulos rectángulos OBP y OCP, $\cos\beta = y/|\mathbf{r}|$ y $\cos\gamma = z/|\mathbf{r}|$, respectivamente. Asimismo, $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Entonces, $\cos\alpha = x/r$, $\cos\beta = y/r$, y $\cos\gamma = z/r$, de donde es posible obtener los valores de α, β y γ. De éstos se sigue que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1.$$

Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan *cosenos directores* del vector **OP**.

1.26. Las fuerzas **A**, **B** y **C** actúan sobre un objeto y están dadas en términos de sus componentes por medio de las ecuaciones vectoriales $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Encuentre la magnitud de la resultante de estas fuerzas.

Solución

La fuerza resultante es $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_1 + B_1 + C_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2 + C_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3 + C_3)\mathbf{k}$.

Magnitud de la resultante $= \sqrt{(A_1 + B_1 + C_1)^2 + (A_2 + B_2 + C_2)^2 + (A_3 + B_3 + C_3)^2}$.
Es fácil extender el resultado a más de tres fuerzas.

1.27. Encuentre un conjunto de ecuaciones para las líneas rectas que pasan por los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Solución

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ los vectores de posición de P y Q, respectivamente, y $\mathbf{r}$ el vector de posición de cualquier punto R sobre la recta que une P y Q, como se ilustra en la figura 1-22.

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PR} = \mathbf{r} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$$
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Pero $\mathbf{PR} = t\mathbf{PQ}$, donde t es un escalar. Entonces, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ es la ecuación vectorial requerida de la línea recta (compare con el problema 1.14).

En coordenadas rectangulares tenemos que, como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = t[(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})]$$

o bien

$$(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} = t[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}]$$

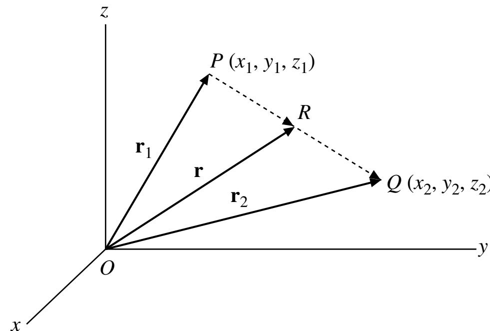


Figura 1-22

Como **i**, **j** y **k** son vectores no coplanares, según el problema 1.14 tenemos que:

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1),\ y - y_1 = t(y_2 - y_1),\ z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

son las ecuaciones paramétricas de la recta, en las que t es el parámetro. Al eliminar t se obtiene:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1.28. Demuestre la proposición 1.4: dos o más vectores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es una combinación lineal de los otros.

Solución

Supongamos que, por ejemplo, $\mathbf{A}_j$ es una combinación lineal de los otros,

$$\mathbf{A}_j = \mathrm{a}_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathrm{a}_{j-1}\mathbf{A}_{j-1} + \mathrm{a}_{j+1}\mathbf{A}_{j+1} + \cdots + \mathrm{a}_m\mathbf{A}_m$$

Entonces, al sumar $-\mathbf{A}j$ en ambos lados se obtiene:

$$\mathrm{a}_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathrm{a}_{j-1}\mathbf{A}_{j-1} - \mathbf{A}_j + \mathrm{a}_{j+1}\mathbf{A}_{j+1} + \cdots + \mathrm{a}_m\mathbf{A}_m = \mathbf{0}$$

donde el coeficiente de $\mathbf{A}_j$ no es 0. Entonces, los vectores son linealmente dependientes.

A la inversa, supongamos que los vectores son linealmente dependientes, digamos

$$\mathrm{b}_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathrm{b}_j\mathbf{A}_j + \cdots + \mathrm{b}_m\mathbf{A}_m = \mathbf{0} \quad \text{donde } \mathrm{b}_j \neq 0$$

Entonces puede resolverse para $\mathbf{A}_j$ y se obtiene:

$$\mathbf{A}_j = (\mathrm{b}_1/\mathrm{b}_j)\mathbf{A}_1 + \cdots + (\mathrm{b}_{j-1}/\mathrm{b}_j)\mathbf{A}_{j-1} + (\mathrm{b}_{j+1}/\mathrm{b}_j)\mathbf{A}_{j+1} + \cdots + (\mathrm{b}_m/\mathrm{b}_j)\mathbf{A}_m$$

Así, $\mathbf{A}_j$ es una combinación lineal de los otros vectores.

1.29. Considere el campo escalar φ definido por $\varphi(x, y, z) = 3x^2z^2 - xy^3 - 15$. Encuentre φ en los puntos *a*) (0, 0, 0), *b*) (1, −2, 2), *c*) (−1, −2, −3).

Solución

a) $\varphi(0, 0, 0) = 3(0)^2(0)^2 - (0)(0)^3 - 15 = 0 - 0 - 15 = -15.$
b) $\varphi(1, -2, 2) = 3(1)^2(2)^2 - (1)(-2)^3 - 15 = 12 + 8 - 15 = 5.$
c) $\varphi(-1, -2, -3) = 3(-1)^2(-3)^2 - (-1)(-2)^3 - 15 = 27 - 8 + 15 = 4.$

1.30. Describa los campos vectoriales definidos por:

a) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, *b*) $\mathbf{V}(x, y) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, *c*) $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Solución

a) En cada punto (x, y), excepto en (0, 0), del plano xy, está definido un vector único $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud $\sqrt{x^2 + y^2}$ cuya dirección pasa por el origen y se aleja de éste. Para simplificar los procedimientos de

graficación, observe que todos los vectores asociados con puntos sobre los círculos $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, tienen magnitud a. Entonces, el campo se muestra en la figura 1-23*a*), con una escala apropiada.

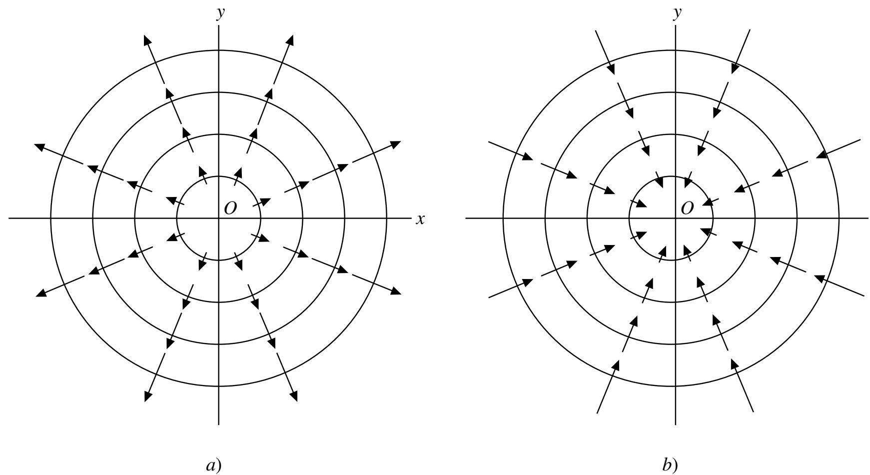


Figura 1-23

b) Aquí, cada vector es igual pero con dirección opuesta al correspondiente en el inciso *a*). Así, el campo aparece en la figura 1-23*b*).

En la figura 1-23*a*), el campo tiene la apariencia de un fluido que emerge de un punto fuente O y fluye en las direcciones que se indican. Por esta razón recibe el nombre de *campo fuente* y O el de *fuente*.

En la figura 1-23*b*), el campo parece fluir hacia O, por lo que se llama *campo sumidero* y O es el *sumidero*.

En tres dimensiones la interpretación es que un fluido emerge en forma radial desde (o que se acerca en forma radial hacia) una recta fuente (o recta sumidero).

El campo vectorial se denomina bidimensional porque es independiente de z.

c) Como la magnitud de cada vector es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, todos los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, tienen vectores de magnitud a asociados a ellos. Entonces, el campo toma la apariencia de un fluido que emerge desde una fuente O y avanza en todas las direcciones del espacio. Es un *campo fuente tridimensional*.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.31. Determine cuáles de los siguientes son escalares y cuáles son vectores:

a) Energía cinética, *b*) intensidad de campo eléctrico, *c*) entropía, *d*) trabajo, *e*) fuerza centrífuga, *f*) temperatura, *g*) carga, *h*) esfuerzo cortante, *i*) frecuencia.

1.32. Un aeroplano viaja 200 millas hacia el oeste, y luego 150 millas a 60° hacia el noroeste. Determine el desplazamiento resultante.

1.33. Encuentre la resultante de los siguientes desplazamientos: **A**: 20 millas a 30° al sureste; **B**: 50 millas hacia el oeste; **C**: 40 millas a 30° al noreste; **D**: 30 millas a 60° al suroeste.

1.34. Suponga que ABCDEF son los vértices de un hexágono regular. Encuentre la resultante de las fuerzas representadas por los vectores **AB**, **AC**, **AD**, **AE** y **AF**.

1.35. Considere los vectores **A** y **B**. Demuestre que: *a*) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$; *b*) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$.

1.36. Demuestre que $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$.

1.37. Dos ciudades, A y B, están situadas en oposición directa sobre las orillas de un río cuyo ancho es de 8 millas y fluye con una velocidad de 4 mi/h. Un hombre ubicado en A desea llegar a la ciudad C que está corriente arriba a 6 millas de la ciudad B y en el mismo lado que ésta. Si su embarcación viaja con una velocidad máxima de 10 mi/h y si desea llegar a C en el menor tiempo posible, ¿qué dirección debe seguir y cuánto tiempo durará el viaje?

1.38. Simplifique la expresión: $2\mathbf{A} + \mathbf{B} + 3\mathbf{C} - \{\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{C})\}$.

1.39. Considere vectores no colineales **a** y **b**. Suponga

$$\mathbf{A} = (x + 4y)\mathbf{a} + (2x + y + 1)\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (y - 2x + 2)\mathbf{a} + (2x - 3y - 1)\mathbf{b}$$

Encuentre x e y tales que $3\mathbf{A} = 2\mathbf{B}$.

1.40. Los vectores básicos $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ están dados en términos de los vectores básicos $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$ por las relaciones

$$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$$

Suponga que $\mathbf{F} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$. Exprese **F** en términos de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

1.41. Sobre un objeto P actúan tres fuerzas coplanares, como se ilustra en la figura 1-24. Calcule la fuerza necesaria para impedir que P se mueva.

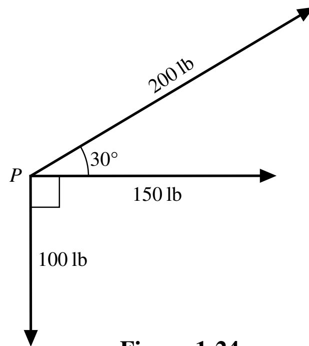


Figura 1-24

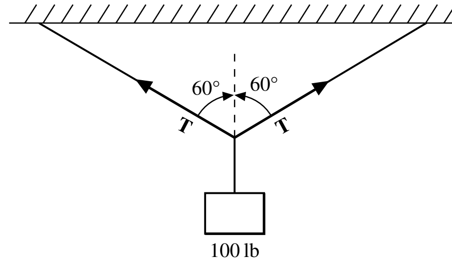


Figura 1-25

1.42. Un peso de 100 libras está suspendido de su centro por medio de una cuerda, como se aprecia en la figura 1-25. Determine la tensión **T** en la cuerda.

1.43. Suponga que **a**, **b** y **c** son vectores no coplanares. Determine si los vectores siguientes tienen independencia o dependencia lineal:

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_3 = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

1.44. *a*) Si O es un punto dentro del triángulo ABC y P, Q y R son los puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente, demuestre que $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \mathbf{OP} + \mathbf{OQ} + \mathbf{OR}$.
b) ¿El resultado es el mismo si O es cualquier punto fuera del triángulo? Demuestre su respuesta.

1.45. En la figura 1-26, $ABCD$ es un paralelogramo con P y Q como puntos medios de los lados **BC** y **CD**, respectivamente. Demuestre que **AP** y **AQ** trisecan la diagonal **BC** en los puntos E y F.

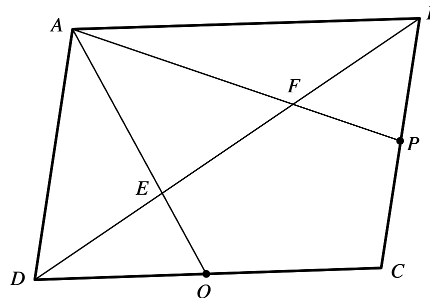


Figura 1-26

1.46. Demuestre que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercero y tiene la mitad de su magnitud.

1.47. Pruebe que las medianas de un triángulo se cortan en un punto común, que es el punto de trisección de las medianas.

1.48. Demuestre que los ángulos bisectores de un triángulo se encuentran en un punto común.

1.49. Sea que los vectores de posición de los puntos P y Q relativos al origen O están dados por los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, respectivamente. Suponga que R es un punto que divide a PQ en segmentos que están en la razón $m{:}n$. Demuestre que el vector de posición de R está dado por $\mathbf{r} = (m\mathbf{p} + n\mathbf{q})/(m + n)$ y que es independiente del origen.

1.50. Un cuadrilátero $ABCD$ tiene masas de 1, 2, 3 y 4 unidades localizadas, respectivamente, en sus vértices $A(-1, -2, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$ y $D(3, 1, 2)$. Encuentre las coordenadas del centroide.

1.51. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados A, B y C, que no están en la misma recta y tienen vectores de posición $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ relativos a un origen O, se pueden escribir como:

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}}{m + n + p}$$

donde m, n y p son escalares. Verifique que la ecuación es independiente del origen.

1.52. Los vectores de posición de los puntos P y Q están dados por $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine $\mathbf{PQ}$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, y determine su magnitud.

1.53. Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre
a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}$, *b*) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$, *c*) $|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|$, *d*) un vector unitario paralelo a $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$.

1.54. Las fuerzas siguientes actúan sobre una partícula P: $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, medidas en libras. Encuentre *a*) la resultante de las fuerzas, *b*) la magnitud de la resultante.

1.55. En cada caso, determine si los vectores son linealmente independientes o dependientes:
a) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

1.56. Pruebe que cuatro vectores cualesquiera en tres dimensiones deben ser linealmente dependientes.

1.57. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que los vectores $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ sean linealmente independientes, es que el determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$ sea diferente de cero.

1.58. *a*) Demuestre que los vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ pueden formar los lados de un triángulo.
b) Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo.

1.59. Dado el campo escalar definido por $\phi(x, y, z) = 4yx^3 + 3xyz - z^2 + 2$. Encuentre *a*) $\phi(1, -1, -2)$, *b*) $\phi(0, -3, 1)$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.31. *a*) e, *b*), v, *c*) e, *d*) e, *e*) v, *f*) e, *g*) e, *h*) v, *i*) e.

1.32. Magnitud 304.1 $(50\sqrt{37})$, dirección 25°17′ al noreste (arcsen $3\sqrt{111}/74$).

1.33. Magnitud 20.9 millas, dirección 21°39′ al suroeste.

1.34. $3\mathbf{AD}$.

1.37. Línea recta corriente arriba con un ángulo de 34°28′ respecto de la orilla. 1 hora 25 minutos.

1.38. $5\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + \mathbf{C}$.

1.39. $x = 2$, $y = -1$.

1.40. $2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$.

1.41. 323 libras directamente opuestas a la fuerza de 150 libras.

1.42. 100 libras.

1.43. Linealmente dependiente, ya que $\mathbf{r}_3 = 5\mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2$.

1.44. Sí.

1.50. (2, 0, 2).

1.52. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 7

1.53. *a*) $11\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$, *b*) $\sqrt{93}$,

1.54. *a*) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, *b*) $\sqrt{5}$.

c) $\sqrt{398}$, $(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C})/\sqrt{398}$.

1.55. *a*) Linealmente dependientes, *b*) Linealmente independientes.

1.58. *b*) $\sqrt{6}$, $(1/2)\sqrt{114}$, $(1/2)\sqrt{150}$.

1.59. *a*) 36, *b*) -11.

CAPÍTULO 2

El producto punto y el producto cruz

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se definieron las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. Aquí definimos dos nuevas operaciones de multiplicación de vectores. Una de ellas, el producto punto, da como resultado un escalar, mientas que la otra, el producto cruz, genera un vector. Después se combinan dichas operaciones para definir ciertos productos triples.

2.2 EL PRODUCTO PUNTO O PRODUCTO ESCALAR

El producto punto o escalar de dos vectores **A** y **B** se denota con $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (se lee: ***A*** punto ***B***), y se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo θ entre ellos. En símbolos:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Se hace énfasis en que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ es un escalar y no un vector.

Se aplica la proposición siguiente:

PROPOSICIÓN 2.1: Suponga que **A**, **B** y **C** son vectores y m es un escalar. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

i) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ Ley conmutativa del producto punto
ii) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ Ley distributiva
iii) $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$
iv) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$
v) Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y **A** y **B** no son vectores nulos, entonces **A** y **B** son perpendiculares.

Existe una fórmula sencilla para $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ con el uso de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

PROPOSICIÓN 2.2: Dados $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

COROLARIO 2.3: Suponga que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.

EJEMPLO 2.1 Dado $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. Entonces:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (4)(5) + (2)(-1) + (-3)(-2) = 20 - 2 + 6 = 24, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = 12 + 2 - 21 = -7,$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = 15 - 1 - 14 = 0, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 4^2 + 2^2 + (-3)^2 = 16 + 4 + 9 = 29$$

Así, los vectores **B** y **C** son perpendiculares.

2.3 PRODUCTO CRUZ

El producto cruz de los vectores **A** y **B** es un vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (se lee: **A** cruz **B**) que se define como sigue. La magnitud $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es igual al producto de las magnitudes de los vectores **A** y **B** por el seno del ángulo θ entre ellos. La dirección de $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al plano de **A** y **B**, de modo que **A**, **B** y **C** forman un sistema de mano derecha. En símbolos,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{u} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde **u** es un vector unitario que indica la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ [entonces, **A**, **B** y **u** forman un sistema de mano derecha]. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, o si **A** es paralelo a **B**, entonces sen $\theta = 0$, y se define $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Se aplican las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 2.4: Suponga que **A**, **B** y **C** son vectores y m es un escalar. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

i) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ No se cumple la ley conmutativa para el producto cruz
ii) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ Ley distributiva
iii) $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$
iv) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
v) Si $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ y **A** y **B** no son vectores nulos, entonces **A** y **B** son paralelos.
vi) La magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es la misma que el área de un paralelogramo con lados **A** y **B**.

Existe una fórmula sencilla para $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ cuando se usan los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

PROPOSICIÓN 2.5: Dado $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 2.2 Dados: $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 19\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

2.4 PRODUCTOS TRIPLES

Los productos punto y cruz de tres vectores, **A**, **B** y **C**, generan resultados importantes llamados *productos triples*, de la forma $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ y $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

La proposición siguiente se cumple.

PROPOSICIÓN 2.6: Suponga que **A**, **B** y **C** son vectores y m es un escalar. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

i) En general, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
ii) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) =$ volumen de un paralelepípedo cuyas aristas son **A**, **B** y **C**, o el negativo de dicho volumen, según si **A**, **B** y **C** forman o no un sistema de mano derecha.
iii) En general, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$
(No se cumple la ley asociativa para el producto cruz)
iv) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$

Existe una fórmula sencilla para $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ cuando se utilizan los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

PROPOSICIÓN 2.7: Dados $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 2.3 Dados $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Entonces:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 12 + 15 + 9 - 8 - 20 = -8.$$

2.5 CONJUNTOS RECÍPROCOS DE VECTORES

Los conjuntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ se llaman *conjuntos recíprocos* o *sistemas recíprocos* de vectores si:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 1$$
$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

Es decir, cada vector es ortogonal al recíproco de los otros dos vectores en el sistema.

PROPOSICIÓN 2.8: Los conjuntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ son *conjuntos recíprocos* de vectores si y sólo si

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Producto punto o producto escalar

2.1. Demuestre la proposición 2.1(i): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Solución

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |A||B| \cos\theta = |B||A| \cos\theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Así, es válida la ley conmutativa para el producto punto.

2.2. Demuestre que la proyección de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{B}$ es igual a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{B}$.

Solución

Por los puntos inicial y terminal de $\mathbf{A}$ se hacen pasar planos perpendiculares a $\mathbf{B}$, en G y H, como se aprecia en la figura 2-1. Entonces,

$$\text{Proyección de } \mathbf{A} \text{ sobre } \mathbf{B} = \overline{GH} = \overline{EF} = \mathbf{A} \cos\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$$

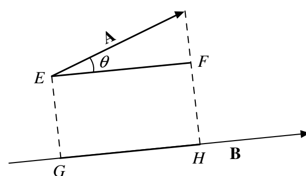


Figura 2-1

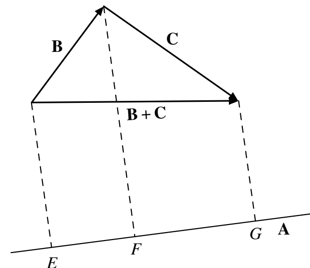


Figura 2-2

2.3. Demuestre la proposición 2.1(ii): $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

Solución

Sea **a** un vector unitario en la dirección de **A**. Entonces, como se ilustra en la figura 2-2:

Proy(**B** + **C**) sobre **A** = Proy(**B**) sobre **A** + Proy(**C**) sobre **A**, y por tanto $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{a}$

Al multiplicar por A,

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot A\mathbf{a} \quad \text{y} \quad (\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$$

Entonces, según la ley conmutativa del producto punto,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

Con lo que se demuestra que la ley distributiva es válida.

2.4. Demuestre que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$.

Solución

Según el problema 2.3, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$. Las leyes ordinarias del álgebra son válidas para el producto punto.

2.5. Evalúe: *a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$, *b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}$, *c*) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}$, *d*) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{j} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$, *e*) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k})$.

Solución

a) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}||\mathbf{i}|\cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$
b) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}||\mathbf{k}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$
c) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}||\mathbf{j}|\cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$
d) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$
e) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) - \mathbf{j}\,(3\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

2.6. Suponga que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

Solución

Como $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, y todos los demás productos punto son iguales a cero, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\,(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})\\ &= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\,(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})\\ &= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &\quad + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\end{aligned}$$

2.7. Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Demuestre que $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

Solución

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0^\circ = A^2$. Entonces, $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$.
Según el problema 2.6 y si hacemos $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\\ &= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\end{aligned}$$

Entonces, $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ es la magnitud de **A**. En ocasiones $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ se escribe como $\mathbf{A}^2$.

2.8. Suponga que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ y que A y B son diferentes de cero. Demuestre que **A** es perpendicular a **B**.

Solución

Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, o $\theta = 90^\circ$. A la inversa, si $\theta = 90^\circ$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

2.9. Encuentre el ángulo entre $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$.

Solución

Tenemos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$.

$$|A| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3 \quad \text{y} \quad |B| = \sqrt{(7)^2 + (0)^2 + (24)^2} = 25$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(7) + (2)(0) + (-1)(24) = -10$$

Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{-10}{(3)(25)} = \frac{-2}{15} = -0.1333 \text{ y } \theta = 98° \text{ (aproximadamente).}$$

2.10. Determine el valor de α de modo que $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ sean perpendiculares.

Solución

Según la proposición 2.1*v*), **A** y **B** son perpendiculares cuando $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Entonces,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(1) + (\alpha)(3) + (1)(-8) = 2 + 3\alpha - 8 = 0$$

si $\alpha = 2$.

2.11. Demuestre que los vectores $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, forman un triángulo rectángulo.

Solución

Primero se demostrará que los vectores forman un triángulo. De la figura 2-3 observamos que los vectores forman un triángulo si:

a) uno de los vectores, digamos (3), es la suma de (1) más (2), o bien
b) la suma de los vectores (1) + (2) + (3) es igual a cero

según si *a*) dos vectores tienen un punto terminal común, o *b*) ninguno de los vectores tiene un punto terminal común. Por ensayos se encuentra que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, de modo que los vectores formen un triángulo.

Como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (-1)(-1) + (1)(-1) + (0)(-2) = 0$, se concluye que **A** y **B** son perpendiculares y que el triángulo es rectángulo.

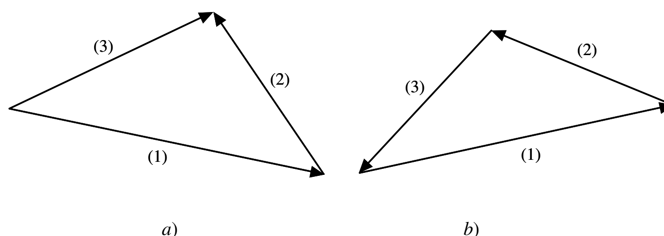


Figura 2-3

2.12. Encuentre los ángulos que forma el vector $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$ con los ejes coordenados.

Solución

Sean α, β y γ los ángulos que forma **A** con los ejes positivos de las x, y y z, respectivamente.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = |A|(1) \cos \alpha = \sqrt{(4)^2 + (-8)^2 + (1)^2} \cos \alpha = 9 \cos \alpha$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 4$$

Entonces, $\cos \alpha = 4/9 = 0.4444$ y $\alpha = 63.6°$, aproximadamente. En forma similar,

$$\cos \beta = -8/9,\ \beta = 152.7° \text{ y } \cos \gamma = 1/9,\ \gamma = 83.6°$$

Los cosenos de α, β y γ se llaman *cosenos directores* del vector **A**.

2.13. Encuentre la proyección del vector $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ sobre el vector $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución

Se usa el resultado del problema 2.2. Un vector unitario en la dirección de **B** es:

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/|B| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/\sqrt{1+4+4} = \mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3 + 2\mathbf{k}/3$$

La proyección de **A** sobre el vector **B** es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}/3 + 2\mathbf{j}/3 + 2\mathbf{k}/3) = (1)(1/3) + (-2)(2/3) + (3)(2/3) = 1.$$

2.14. Sin usar el producto cruz, determine un vector unitario perpendicular al plano de $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución

Sea el vector $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ perpendicular al plano de **A** y **B**. Entonces, **C** es perpendicular a **A** y también a **B**. Por tanto,

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0 \quad \text{o bien} \quad (1)\ 2c_1 - 6c_2 = 3c_3$$
$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = 4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \quad \text{o bien} \quad (2)\ 4c_1 + 3c_2 = c_3$$

Se resuelven simultáneamente (1) y (2): $c_1 = \frac{1}{2}c_3,\ c_2 = -\frac{1}{3}c_3,\ \mathbf{C} = c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$.

Entonces, un vector unitario en la dirección **C** es $\dfrac{\mathbf{C}}{|C|} = \dfrac{c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)}{\sqrt{c_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2\right]}} = \pm\left(\frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$.

2.15. Demuestre la ley de los cosenos para los triángulos planos.

Solución

De la figura 2-4,

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

Entonces,

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

y

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos\theta$$

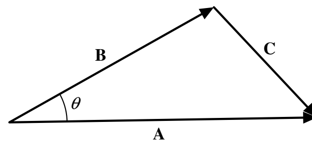


Figura 2-4

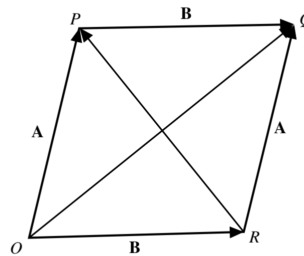


Figura 2-5

2.16. Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares (consulte la figura 2-5).

Solución

$$OQ = OP + PQ = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$
$$OR + RP = OP \quad \text{o bien} \quad \mathbf{B} + RP = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad RP = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

Entonces, como $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$,

$$OQ \cdot RP = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = |\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2 = 0$$

Se concluye que OQ es perpendicular a RP.

2.17. Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ cualquier vector. Demuestre que $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$.

Solución

Como $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = A_1$$

De manera similar, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_2$ y $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_3$. Entonces

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}.$$

2.18. Calcule el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ si se aplica la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución

Considere la figura 2-6.

$$\begin{aligned}\text{Trabajo realizado} &= (\text{magnitud de la fuerza en la dirección del movimiento})(\text{distancia recorrida})\\ &= (\mathbf{F} \cos \theta)(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k})\\ &= 6 - 1 + 5 = 10\end{aligned}$$

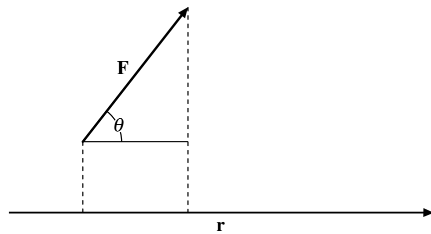


Figura 2-6

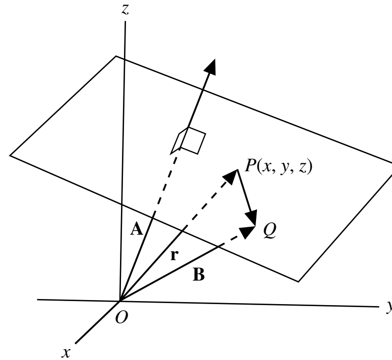


Figura 2-7

2.19. Encuentre una ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y que pasa por el punto terminal del vector $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ [vea la figura 2-7].

Solución

Como **PQ** = **B** − **r** es perpendicular a **A**, tenemos que (**B** − **r**) · **A** = 0, es decir que **r** · **A** = **B** · **A** es la ecuación requerida del plano en forma vectorial. En forma rectangular se convierte en

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

o bien

$$2x - 3y + 6z = 2 - 6 + 18 = 14$$

2.20. Encuentre la distancia del origen al plano descrito en el problema 2.19.

Solución

La distancia del origen al plano es la proyección de **B** sobre **A**. Un vector unitario en la dirección de **A** es

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}/|A| = \frac{2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Entonces, la proyección de **B** sobre **A** es igual a

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) = (1)\frac{2}{7} - (2)\frac{3}{7} + (3)\frac{6}{7} = 2.$$

Producto cruz o vectorial

2.21. Demuestre que **A** × **B** = −(**A** × **B**).

Solución

A · **B** = **C** tiene magnitud de AB sen θ y dirección tal que **A**, **B** y **C** forman un sistema de mano derecha, como en la figura 2-8*a*).
B · **A** = **D** tiene magnitud de BA sen θ y dirección tal que **B**, **A** y **D** forman un sistema de mano derecha, como se ilustra en la figura 2-8*b*).
Entonces, **D** tiene la misma magnitud que **C** pero en dirección opuesta, es decir **C** = −**D**. Entonces, **A** × **B** = −(**A** × **B**).
En consecuencia, no es válida la ley conmutativa para el producto cruz.

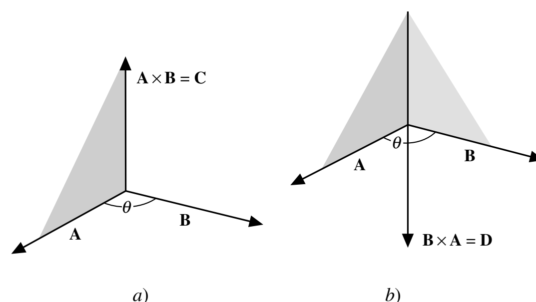


Figura 2-8

2.22. Suponga que **A** × **B** = **0** y que **A** y **B** son diferentes de cero. Demuestre que **A** es paralelo a **B**.

Solución

Como **A** × **B** = AB sen θ **u** = 0, tenemos que sen $\theta = 0$, por lo que $\theta = 0°$ o $180°$.

2.23. Demuestre que $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$.

Solución

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |AB \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{u}|^2 + |AB \cos \theta|^2$$
$$= A^2B^2 \operatorname{sen}^2 \theta + A^2B^2 \cos^2 \theta$$
$$= A^2B^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$$

2.24. Evalúe: *a*) $2\mathbf{j} \times 3\mathbf{k}$, *b*) $2\mathbf{j} \times -\mathbf{k}$, *c*) $-3\mathbf{i} \times -2\mathbf{k}$ y *d*) $2\mathbf{j} \times 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$

Solución

a) $(2\mathbf{j}) \times (3\mathbf{k}) = 6(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = 6\mathbf{i}$
b) $(2\mathbf{j}) \times (-\mathbf{k}) = -2(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -2\mathbf{i}$
c) $(-3\mathbf{i}) \times (-2\mathbf{k}) = 6(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -6\mathbf{j}$
d) $2\mathbf{j} \times 3\mathbf{i} - \mathbf{k} = 6(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - \mathbf{k} = -6\mathbf{k} - \mathbf{k} = -7\mathbf{k}$.

2.25. Demuestre que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ para el caso en que **A** es perpendicular tanto a **B** como a **C** [vea la figura 2-9].

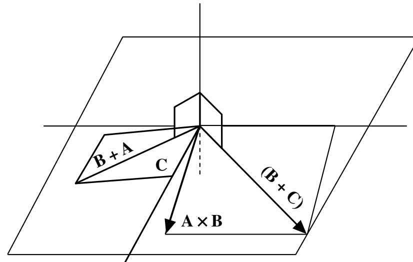
Solución

Como **A** es perpendicular a **B**, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector perpendicular al plano de **A** y **B** y tiene magnitud de AB sen 90° $= AB$ o magnitud de $A\mathbf{B}$. Esto equivale a multiplicar el vector **B** por A y a girar el vector resultante un ángulo de 90° para llevarlo a la posición que se muestra en la figura 2-9.

De manera similar, $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ es el vector que se obtiene al multiplicar **C** por A y girar 90° el vector resultante hasta la posición que se ilustra.

En la misma forma, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es el vector que se obtiene al multiplicar $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ por A, con la rotación del vector resultante en un ángulo de 90° para llevarlo a la posición que se aprecia.

Como $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ es la diagonal del paralelogramo que tiene como lados a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, tenemos que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.



Figur 2-9

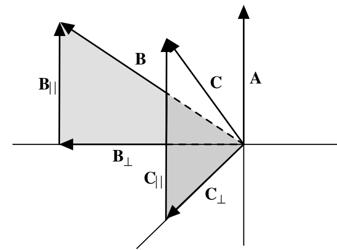


Figura 2-10

2.26. Demuestre que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ para el caso general en que **A**, **B** y **C** no son coplanares [vea la figura 2-10].

Solución

Se descompone a **B** en dos vectores componentes, uno perpendicular a **A** y otro paralelo a **A**, y se los denota con $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{B}_\parallel$, respectivamente. Entonces, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$.

Si θ es el ángulo entre **A** y **B**, entonces $\mathbf{B}_\perp = B \operatorname{sen} \theta$. Por ello, la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es AB sen θ, igual que la magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Asimismo, la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ es la misma que la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Entonces, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

En forma similar, si **C** se descompone en dos vectores componentes $\mathbf{C}_\parallel$ y $\mathbf{C}_\perp$, paralelos y perpendiculares respectivamente a **A**, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Asimismo, como $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\perp + \mathbf{C}_\parallel = (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) + (\mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\parallel)$, se concluye que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Ahora, $\mathbf{B}_\perp$ y $\mathbf{C}_\perp$ son vectores perpendiculares a **A**, por lo que, según el problema 2.25,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp + \mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp$$

Entonces,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

y se cumple la ley distributiva. Al multiplicar por -1, según el problema 2.21, se obtiene $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Observe que en el producto cruz el orden de los factores sí es importante. Las leyes habituales del álgebra sólo se aplican si se mantiene un orden apropiado.

2.27. Suponga que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k} \times (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\
&\quad + A_3B_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\
&= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

2.28. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, *b*) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ y *c*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

Solución

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Al comparar con el inciso *a*), tenemos que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$. Note que esto equivale al teorema siguiente: si se cambian dos renglones de un determinante, cambia el signo de éste.

c) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

2.29. Suponga que $\mathbf{A} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Calcule: *a*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ y *b*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

Solución

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Entonces $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

b) $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Por tanto, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Así $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Esto demuestra la necesidad de usar paréntesis en $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ a fin de evitar ambigüedades.

2.30. Demuestre que: *a*) el área de un paralelogramo con lados que se tocan **A** y **B**, como se ilustra en la figura 2-11, es $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$. *b*) El área de un triángulo con lados **A** y **B** es $\frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

Solución

a) Área de un paralelogramo $= h|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \operatorname{sen} \theta \, |\mathbf{B}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

b) Área de un triángulo $= \frac{1}{2}$ área del paralelogramo $= \frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

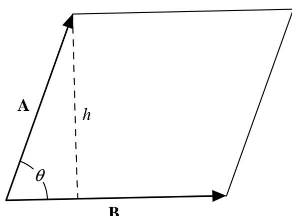


Figura 2-11

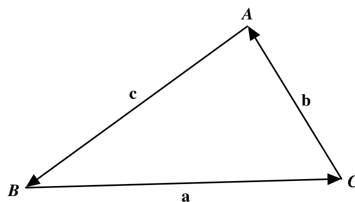


Figura 2-12

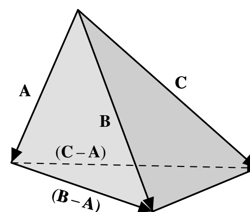


Figura 2-13

2.31. Demuestre la ley de los senos para los triángulos planos.

Solución

Sea que **a, b** y **c** representan los lados de un triángulo *ABC*, como en la figura 2-12. Entonces, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Al multiplicar sucesivamente $\mathbf{a} \times$, $\mathbf{b} \times$ y $\mathbf{c} \times$, se encuentra que:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

es decir

$$ab \operatorname{sen} C = bc \operatorname{sen} A = ca \operatorname{sen} B$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

2.32. Considere un tetraedro como el de la figura 2-13, con lados F_1, F_2, F_3 y F_4. Sean $\mathbf{V}_1$,$\mathbf{V}_2$,$\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_4$, vectores cuyas magnitudes sean iguales a las áreas de F_1, F_2, F_3 y F_4, respectivamente, y cuyas direcciones sean perpendiculares a dichas caras en la dirección hacia fuera. Demuestre que $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{0}$.

Solución

De acuerdo con el problema 2.30, el área de una cara triangular determinada por **R** y **S** es $\frac{1}{2}|\mathbf{R} \times \mathbf{S}|$.

Los vectores asociados con cada una de las caras del tetraedro son

$$\mathbf{V}_1 = \tfrac{1}{2}\mathbf{A}\times\mathbf{B},\ \mathbf{V}_2 = \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{C},\ \mathbf{V}_3 = \tfrac{1}{2}\mathbf{C}\times\mathbf{A} \text{ y } \mathbf{V}_4 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{A})\times(\mathbf{B}-\mathbf{A})$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_3+\mathbf{V}_4 &= \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}+(\mathbf{C}-\mathbf{A})\times(\mathbf{B}-\mathbf{A})]\\ &= \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}+\mathbf{C}\times\mathbf{B}-\mathbf{C}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{A}] = 0.\end{aligned}$$

Este resultado se generaliza a poliedros cerrados y, en el caso límite, a cualquier superficie cerrada.

Debido a la aplicación presentada aquí, en ocasiones es conveniente asignar una dirección al área, por lo que se habla del *área vectorial*.

2.33. Encuentre el área del triángulo cuyos vértices están en $P(1, 3, 2)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(-1, 2, 3)$.

Solución

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} &= (2-1)\mathbf{i}+(-1-3)\mathbf{j}+(1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k}\\ \mathbf{PR} &= (-1-1)\mathbf{i}+(2-3)\mathbf{j}+(3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\end{aligned}$$

Del problema 2.30,

$$\text{área del triángulo} = \frac{1}{2}|\mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}| = \frac{1}{2}|(\mathbf{i}-4\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-5\mathbf{i}+\mathbf{j}-9\mathbf{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(1)^2+(-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{107}.$$

2.34. Determine un vector unitario perpendicular al plano de $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Solución

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ es un vector perpendicular al plano de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -6 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix} = 15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}$$

Un vector unitario paralelo a $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ es $\dfrac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|} = \dfrac{15\mathbf{i}-10\mathbf{j}+30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2+(-10)^2+(30)^2}} = \dfrac{3}{7}\mathbf{i}-\dfrac{2}{7}\mathbf{j}+\dfrac{6}{7}\mathbf{k}.$

Otro vector unitario, en dirección opuesta, es $(-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k})/7$. Compare este resultado con el problema 2.14.

2.35. Encuentre una expresión para el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto de un punto P, como se ilustra en la figura 2-14.

Solución

El momento $\mathbf{M}$ de $\mathbf{F}$ con respecto de P tiene igual magnitud a P en la línea de acción de $\mathbf{F}$. Entonces, si $\mathbf{r}$ es el vector de P al punto inicial Q de $\mathbf{F}$,

$$M = F(r \operatorname{sen}\theta) = rF\operatorname{sen}\theta = |\mathbf{r}\times\mathbf{F}|$$

Si se piensa en un tornillo de rosca derecha en P, perpendicular al plano de **r** y **F**, entonces, cuando actúa la fuerza **F**, el tornillo se moverá en dirección de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Debido a esto, es conveniente definir el momento como el vector $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

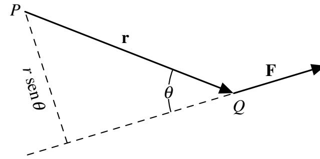


Figura 2-14

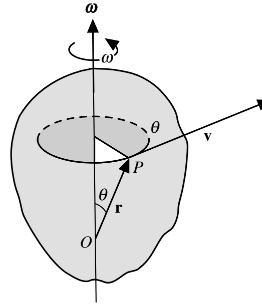


Figura 2-15

2.36. Como se aprecia en la figura 2-15, un cuerpo rígido gira con respecto de un eje a través del punto O con rapidez angular ω. Demuestre que la velocidad lineal, **v**, de un punto P del cuerpo con vector de posición **r** está dada por $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, donde ω es el vector con magnitud de ω cuya dirección es aquélla en que avanzaría un tornillo de mano derecha con la rotación dada.

Solución

Como P viaja en un círculo de radio r sen θ, la magnitud de la velocidad lineal **v** es $\omega(r \operatorname{sen}\theta) = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$. Asimismo, **v** debe ser perpendicular tanto a ω como a **r**, y es tal que **r**, ω y **v** forman un sistema de mano derecha.

Entonces, **v** coincide tanto en magnitud como en dirección con $\omega \times \mathbf{r}$; así, $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. El vector ω recibe el nombre de *velocidad angular*.

Productos triples

2.37. Suponga que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Demuestre que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\ &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}] \\ &= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) \\ &= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.38. Evalúe $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\,(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k})$.

Solución

Según el problema 2.37, el resultado es $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 5.$

2.39. Demuestre que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

Solución

Según el problema 2.37, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$.

De acuerdo con un teorema de los determinantes, si se intercambian dos renglones de un determinante, el signo de éste cambia, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}B_1 & B_2 & B_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

2.40. Demuestre que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

Solución

Del problema 2.39, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

En ocasiones, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ se escribe sin paréntesis: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$. En este caso no puede haber ambigüedad porque las únicas interpretaciones posibles son $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ y $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$. Sin embargo, esta última no tiene ningún significado porque no está definido el producto cruz de un escalar con un vector.

El resultado $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ en ocasiones se resume en el enunciado de que el punto y la cruz pueden cambiar su lugar sin que se afecte el resultado.

2.41. Demuestre que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=\mathbf{0}$.

Solución

Del problema 2.40 y del hecho que $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$, se tiene que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{0}$.

2.42. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que los vectores **A**, **B** y **C** sean coplanares es que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$.

Solución

Observe que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ no puede tener otro significado más que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

Si **A**, **B** y **C** son coplanares, el volumen del paralelepípedo formado por ellos es igual a cero. Entonces, de acuerdo con el problema 2.43, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$.

A la inversa, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$, el volumen del paralelepípedo formado por los vectores **A**, **B** y **C** es igual a cero, por lo que los vectores deben encontrarse en el mismo plano.

2.43. Demuestre que el valor absoluto del producto triple $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ es el volumen de un paralelepípedo con lados **A**, **B** y **C**.

Solución

Sea **n** un vector unitario normal a un paralelogramo I, con dirección de $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, y sea h la altura del punto terminal de **A** sobre el paralelogramo I [vea la figura 2-16].

$$\begin{aligned}\text{Volumen del paralelepípedo} &= (\text{altura } h)(\text{área del paralelogramo } I)\\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|)\\ &= \mathbf{A}\cdot\{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\mathbf{n}\}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\end{aligned}$$

Si **A**, **B** y **C** no forman un sistema de mano derecha, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}<0$, y el volumen $=|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$.

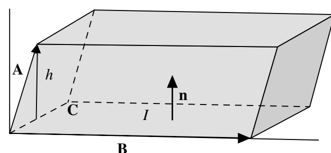


Figura 2-16

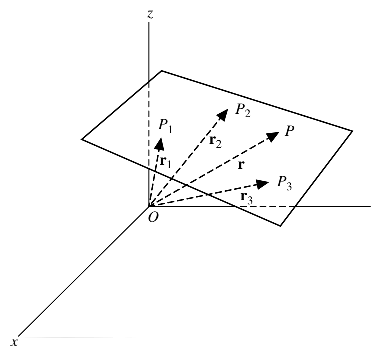


Figura 2-17

2.44. Sean $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$ los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Encuentre una ecuación para el plano que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3.

Solución

Supondremos que P_1, P_2 y P_3 no están en la misma línea recta; entonces determinan un plano.

Sea que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ denote al vector de posición de cualquier punto $P(x, y, z)$ en el plano. Considere vectores $\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P_1P_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{P_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, todos en el plano [vea la figura 2-17].

Según el problema 2.42, $\mathbf{P_1P} \cdot \mathbf{P_1P_2} \times \mathbf{P_1P_3} = 0$ o $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$.

En términos de coordenadas rectangulares se convierte en:

$$[(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}] \cdot [(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}] \times [(x_3 - x_1)\mathbf{i} + (y_3 - y_1)\mathbf{j} + (z_3 - z_1)\mathbf{k}] = 0$$

o bien, según el problema 2.37,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.45. Encuentre una ecuación para el plano determinado por los puntos $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ y $P_3(-1, 3, 2)$.

Solución

Los vectores de posición de P_1, P_2 y P_3 y de cualquier punto $P(x, y, z)$ son, respectivamente, $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Entonces, $\mathbf{PP_1} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P_2P_1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{P_3P_1} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ se encuentran en el plano pedido, de modo que

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$$

es decir,

$$[(x - 2)\mathbf{i} + (y + 1)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}] \times [-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}] = 0$$
$$[(x - 2)\mathbf{i} + (y + 1)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}] \cdot [11\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}] = 0$$
$$11(x - 2) + 5(y + 1) + 13(z - 1) = 0 \quad \text{o} \quad 11x + 5y + 13z = 30.$$

2.46. Suponga que los puntos P, Q y R no se encuentran en la misma línea recta y tienen vectores de posición **a**, **b** y **c** relativos a un origen dado. Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ es un vector perpendicular al plano de P, Q y R.

Solución

Sea **r** el vector de posición de cualquier punto en el plano de P, Q y R. Entonces, los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{a}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ son coplanares, por lo que según el problema 2.42

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0 \quad \text{o} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0.$$

Así, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, es perpendicular a $\mathbf{r} - \mathbf{a}$, por lo que es perpendicular al plano de P, Q y R.

2.47. Demuestre que *a*) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ y *b*) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

Solución

a) Sean $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}\\
&= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\times([B_2C_3-B_3C_2]\mathbf{i}+[B_3C_1-B_1C_3]\mathbf{j}+[B_1C_2-B_2C_1]\mathbf{k})\\
&= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_2C_3-B_3C_2 & B_3C_1-B_1C_3 & B_1C_2-B_2C_1\end{vmatrix}\\
&= (A_2B_1C_2-A_2B_2C_1-A_3B_3C_1+A_3B_1C_3)\mathbf{i}+(A_3B_2C_3-A_3B_3C_2-A_1B_1C_2+A_1B_2C_1)\mathbf{j}\\
&\quad+(A_1B_3C_1-A_1B_1C_3-A_2B_2C_3+A_2B_3C_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k})(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)\\
&= (A_2B_1C_2 + A_3B_1C_3 - A_2C_1B_2 - A_3C_1B_3)\mathbf{i} + (B_2A_1C_1 + B_2A_3C_3 - C_2A_1B_1 - C_2A_3B_3)\mathbf{j}\\
&\quad + (B_3A_1C_1 + B_3A_2C_2 - C_3A_1B_1 - C_3A_2B_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

de lo que se concluye el resultado.

b) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, después de reemplazar **A**, **B** y **C** del inciso *a*) por **C**, **A** y **B**, respectivamente.

Observe que $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$, es decir, la ley asociativa para el producto cruz de vectores no es válida para todos los vectores **A**, **B** y **C**.

2.48. Demuestre que $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

Solución

Del problema 2.41, $\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{X}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}$. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$; entonces

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= \{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}\}\cdot\mathbf{D}\\
&= \{\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\}\cdot\mathbf{D}\\
&= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \quad \text{al aplicar el problema 2.47}b).
\end{aligned}$$

2.49. Demuestre que $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$.

Solución

Según el problema 2.47*a*),

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\\
\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) &= \mathbf{C}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\\
\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}$$

Al sumar se llega al resultado.

2.50. Demuestre que $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

Solución

De acuerdo con el problema 2.47*a*), $\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$; entonces,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})
\end{aligned}$$

Según el problema 2.47*b*), $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Y} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y})$. Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \times \mathbf{D}$; entonces,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

2.51. Sea PQR un triángulo esférico cuyos lados p, q y r son arcos de círculos mayores. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} p} = \frac{\operatorname{sen} Q}{\operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{sen} R}{\operatorname{sen} r}$$

Solución

Suponga que la esfera, que se ilustra en la figura 2-18, tiene radio unitario. Sean los vectores unitarios **A**, **B** y **C** dibujados del centro O de la esfera hacia P, Q y R, respectivamente. Del problema 2.50,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{A} \tag{1}$$

Un vector unitario perpendicular a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ es **A**, de modo que la ecuación (1) se convierte en

$$(\operatorname{sen} r \operatorname{sen} q \operatorname{sen} P)\, \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{A} \qquad \text{o bien} \tag{2}$$

$$\operatorname{sen} r \operatorname{sen} q \operatorname{sen} P = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \tag{3}$$

Por permutación cíclica de p, q, r, P, Q, R y **A**, **B** y **C**, obtenemos

$$\operatorname{sen} p \operatorname{sen} r \operatorname{sen} Q = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} \tag{4}$$

$$\operatorname{sen} q \operatorname{sen} p \operatorname{sen} R = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{5}$$

Entonces, como los miembros del lado derecho de (3), (4) y (5) son iguales (vea el problema 2.39)

$$\operatorname{sen} r \operatorname{sen} q \operatorname{sen} P = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} r \operatorname{sen} Q = \operatorname{sen} q \operatorname{sen} p \operatorname{sen} R$$

de lo que se concluye que

$$\frac{\operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} p} = \frac{\operatorname{sen} Q}{\operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{sen} R}{\operatorname{sen} r}$$

Ésta se llama *ley de los senos* para triángulos esféricos.

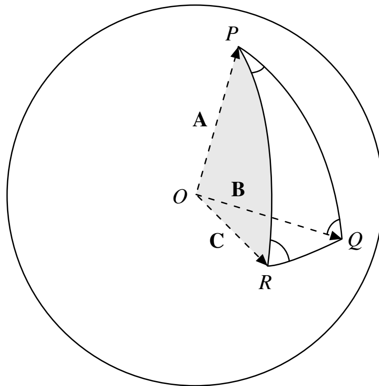


Figura 2-18

2.52. Demuestre que $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2$.

Solución

Según el problema 2.47*a*), $\mathbf{X}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{C})$. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}$; entonces,

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) &= \mathbf{C}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\cdot\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\\ &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})\\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})^2\end{aligned}$$

2.53. Dados los vectores $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, $\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$ y $\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}$, suponga que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq 0$. Demuestre que

a) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = 1$,
b) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = {}'$, $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c} = 0$, $\mathbf{c}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{b} = 0$,
c) si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = V$, entonces $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = 1/V$,
d) $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$ no son coplanares si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son coplanares.

Solución

a) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$

$\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \mathbf{b}\cdot\dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$

$\mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}' = \mathbf{c}\cdot\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 1$

b) $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' = \mathbf{b}\cdot\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}} = 0$

De manera similar se llega a los otros resultados. Lo anterior puede verse también si se observa, por ejemplo, que $\mathbf{a}'$ tiene la dirección de $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, por lo que debe ser perpendicular tanto a $\mathbf{b}$ como a $\mathbf{c}$, de donde se concluye que $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} = 0$ y $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{c} = 0$.

De *a*) y *b*), se observa que los conjuntos de vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, son recíprocos. También consulte los problemas complementarios 2.104 y 2.106.

c) $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{V}$, $\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{V}$, $\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{V}$

Entonces, $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' = \dfrac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{V^3} = \dfrac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{V^3}$

$= \dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})^2}{V^3} = \dfrac{V^2}{V^3} = \dfrac{1}{V}$, utilizando el problema 2.52.

d) De acuerdo con el problema 2.42, si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no son coplanares, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq 0$. Entonces, del inciso *c*), se concluye que $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'\times\mathbf{c}' \neq 0$, por lo que $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$ tampoco son coplanares.

2.54. Demuestre que cualquier vector $\mathbf{r}$ puede ser expresado en términos de los vectores recíprocos del problema 2.53, como:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}.$$

Solución

Del problema 2.50, $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Entonces,

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}} + \frac{\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}$$

Sean $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}$, $\mathbf{C} = \mathbf{c}$ y $\mathbf{D} = \mathbf{r}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\mathbf{c} \\
&= \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\right)\mathbf{a} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\right)\mathbf{b} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}\right)\mathbf{c} \\
&= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.55. Evalúe: *a)* $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j})$, *b)* $(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ y *c)* $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

2.56. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Calcule *a)* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, *b)* A, *c)* B, *d)* $|3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}|$, *e)* $(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$.

2.57. Encuentre el ángulo entre: *a)* $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; *b)* $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{D} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

2.58. Calcule los valores de a para los cuales los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, donde:
a) $\mathbf{A} = a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, *b)* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + a\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

2.59. Determine los ángulos agudos que la línea determinada por los puntos $(1, -3, 2)$ y $(3, -5, 1)$ forma con los ejes coordenados.

2.60. Diga cuáles son los cosenos directores de la línea que une los puntos:
a) $(3, 2, -4)$ y $(1, -1, 2)$, *b)* $(-5, 3, 3)$ y $(-2, 7, 15)$.

2.61. Encuentre los ángulos de un triángulo en el que dos de sus lados están formados por los vectores:
a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, *b)* $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

2.62. Las diagonales de un paralelogramo están dadas por $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Demuestre que el paralelogramo es un rombo y determine la longitud de sus lados y ángulos.

2.63. Diga cuál es la proyección del vector $\mathbf{A}$ sobre el vector $\mathbf{B}$, donde:
a) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, *b)* $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

2.64. Encuentre la proyección del vector $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre la línea que pasa por los puntos $(2, 3, -1)$ y $(-2, -4, 3)$.

2.65. Encuentre un vector unitario perpendicular al vector $\mathbf{A}$ y al vector $\mathbf{B}$, donde:
a) $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, *b)* $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

2.66. Calcule el ángulo agudo que forman dos diagonales de un cubo.

2.67. Encuentre un vector unitario paralelo al plano xy y perpendicular al vector $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

2.68. Demuestre que **A**, **B** y **C** son vectores unitarios mutuamente ortogonales, donde

a) $\mathbf{A} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/3$, $\mathbf{B} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/3$ y $\mathbf{C} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

b) $\mathbf{A} = (12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})/13$, $\mathbf{B} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k})/13$ y $\mathbf{C} = (3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/13$.

2.69. Encuentre el trabajo realizado por un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta:

a) de $(3, 2, -1)$ a $(2, -1, 4)$, en un campo de fuerzas dado por $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

b) de $(3, 4, 5)$ a $(-1, 9, 9)$, en un campo de fuerzas dado por $\mathbf{F} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

2.70. Sea **F** un campo vectorial de fuerzas constante. Demuestre que el trabajo realizado por un cuerpo que se mueve alrededor de cualquier polígono cerrado en dicho campo, es igual a cero.

2.71. Demuestre que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

2.72. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Demuestre que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$

2.73. Sea $ABCD$ cualquier cuadrilátero donde P y Q son los puntos medios de sus diagonales. Demuestre que

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2$$

Ésta es una generalización del problema anterior.

2.74. Considere un plano P perpendicular a un vector **A** dado y a una distancia p del origen. *a*) Encuentre una ecuación del plano P. *b*) Exprese la ecuación del inciso *a*) en coordenadas rectangulares.

2.75. Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ vectores unitarios en el plano xy y que forman ángulos α y β con el eje x positivo.

a) Demuestre que $\mathbf{r}_1 = \cos\alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}$ y que $\mathbf{r}_2 = \cos\beta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\mathbf{j}$.

b) Considere el producto $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$, demuestre las fórmulas trigonométricas

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \text{ y } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

2.76. Sea **a** el vector de posición de un punto dado (x_1, y_1, z_1), y sea **r** el vector de posición de cualquier punto (x, y, z). Describa la posición de **r** si: *a*) $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = 3$, *b*) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$ y *c*) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$.

2.77. Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son los vectores de posición de los puntos P y Q, respectivamente.

a) Encuentre una ecuación para el plano que pasa por Q y es perpendicular a la recta PQ.

b) Calcule la distancia del punto $(-1, 1, 1)$ al plano.

2.78. Evalúe cada una de las siguientes expresiones: *a*) $2\mathbf{j} \times (3\mathbf{i} - 4\mathbf{k})$, *b*) $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times \mathbf{k}$, *c*) $(2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, *d*) $(4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})\,(3\mathbf{i} + \mathbf{k})$ y *e*) $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$.

2.79. Suponga que $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine: *a*) $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$, *b*) $(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \times (2\mathbf{A} - \mathbf{B})$ y *c*) $|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})|$.

2.80. Suponga que $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Calcule:

a) $|(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}|$ *c*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, *e*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

b) $|\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ *d*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, *f*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

2.81. Suponga que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y que cada una de las condiciones siguientes se cumplen simultáneamente; *a*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ y *b*) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$. Demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, pero si sólo se cumple una de las condiciones entonces necesariamente $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

2.82. Calcule el área de un paralelogramo con diagonales: *a*) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

2.83. Encuentre el área del triángulo cuyos vértices son: *a*) (3, −1, 2), (1, −1, −3) y (4, −3, 1), *b*) (2, −3, −2), (−2, 3, 2) y (4, 3, −1).

2.84. Suponga que $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Encuentre un vector de magnitud 5 que sea perpendicular tanto a **A** como a **B**.

2.85. Use el problema 2.75 para deducir las siguientes fórmulas;

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \text{ y } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

2.86. Suponga que se aplica una fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ en el punto (1, −1, 2). Calcule el momento de **F** con respecto del punto: *a*) (2, −1, 3), *b*) (4, −6, 3).

2.87. La velocidad angular de un cuerpo rígido giratorio con respecto de un eje de rotación está dado por $\omega = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Determine la velocidad lineal de un punto *P* sobre el cuerpo cuyo vector de posición relativo a un punto sobre el eje de rotación es $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

2.88. Simplifique lo siguiente: *a*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} + \mathbf{A})$, *b*) $\mathbf{A} \cdot (2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

2.89. Demuestre que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} A \cdot a & A \cdot b & A \cdot c \\ B \cdot a & B \cdot b & B \cdot c \\ C \cdot a & C \cdot b & C \cdot c \end{vmatrix}$

2.90. Encuentre el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están representadas por:

a) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
b) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2.91. Suponga que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$. Demuestre que se cumple cualquiera de las siguientes condiciones: *a*) **A**, **B** y **C** son coplanares pero no hay dos colineales, o bien *b*) dos de los vectores **A**, **B** y **C** son colineales, o *c*) todos los vectores **A**, **B** y **C** son colineales.

2.92. Determine la constante *a* que hace que los vectores siguientes sean coplanares:

a) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, *b*) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $6\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

2.93. Suponga que $\mathbf{A} = x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b} + z_1\mathbf{c}$, $\mathbf{B} = x_2\mathbf{a} + y_2\mathbf{b} + z_2\mathbf{c}$, *y* $\mathbf{C} = x_3\mathbf{a} + y_3\mathbf{b} + z_3\mathbf{c}$. Demuestre que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

2.94. Demuestre que $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ es una condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. Analice los casos en los que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ o $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$.

2.95. Sea que los puntos *P*, *Q* y *R* tienen vectores de posición $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $r_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, relativos al origen *O*. Encuentre la distancia de *P* al plano *OQR*.

2.96. Determine la distancia más corta: *a*) de (6, −4, 4) a la línea que une los puntos (2, 1, 2) y (3, −1, 4). *b*) de (1, −7, 5) a la recta que pasa por los puntos (13, −12, 5) y (23, 12, 5).

2.97. Considere los puntos *P*(2, 1, 3), *Q*(1, 2, 1), *R*(−1, −1, −2) y *S*(1, −4, 0). Encuentre la distancia más corta entre las rectas *PQ* y *RS*.

2.98. Demuestre que las perpendiculares que salen de los vértices de un triángulo hacia los lados opuestos (extendidos, de ser necesario) se encuentran en un punto (llamado *ortocentro* del triángulo).

2.99. Pruebe que los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo se cortan en un punto (llamado *circuncentro* del triángulo).

2.100. Pruebe que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$.

2.101. Sea PQR un triángulo esférico cuyos lados p, q y r son arcos de círculos mayores. Demuestre la *ley de los cosenos para triángulos esféricos*.

$$\cos p = \cos q \cos r + \operatorname{sen} q \operatorname{sen} r$$

con fórmulas análogas para $\cos q$ y $\cos r$ que se obtienen con la permutación cíclica de las literales. Sugerencia: interprete ambos lados de la identidad.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

2.102. Encuentre un conjunto de vectores recíprocos al conjunto de vectores:

a) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

2.103. Suponga que $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$, $\mathbf{b}' = \dfrac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$, $\mathbf{c}' = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$. Demuestre que

$$\mathbf{a} = \frac{b' \times c'}{a' \cdot b' \times c'}, \quad \mathbf{b} = \frac{c' \times a'}{a' \cdot b' \times c'}, \quad \mathbf{c} = \frac{a' \times b'}{a' \cdot b' \times c'}$$

2.104. Suponga que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ tienen las propiedades siguientes:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1$$
$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

Demuestre que se cumplen las hipótesis del problema 2.103, es decir,

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}.$$

2.105. Demuestre que los únicos conjuntos de vectores de mano derecha que son recíprocos entre sí, son $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

2.106. Demuestre que sólo hay un conjunto, y sólo uno, de vectores recíprocos a un conjunto dado de vectores no coplanares $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.55. *a*) 0, *b*) −6, *c*) 1

2.56. *a*) −10, *b*) $\sqrt{14}$, *c*) 6, *d*) $\sqrt{150}$, *e*) −14

2.57. *a*) 90°, arc cos 8/21 = 67°36′

2.58. *a*) $a = 2, -1$, *b*) $a = 2$

2.59. arc cos 2/3, arc cos 2/3, arc cos 1/3 o 48°12′, 48°12′, 70°32′

2.60. *a*) 2/7, 3/7, −6/7 o −2/7, −3/7, 6/7, *b*) 3/13, 4/13, 12/13 o −3/13, −4/13, −12/13

2.61. *a*) arc cos $7/\sqrt{75}$, arc cos $\sqrt{26}/\sqrt{75}$, 90° o 36°4′, 53°56′, 90° *b*) 68.6°, 83.9°, 27.5°

2.62. $5\sqrt{3}/2$, arc cos 23/75, 180° − arc cos 23/75; o 4.33, 72°8′, 107°52′

2.63. *a*) 8/3, *b*) −1

2.64. 1

2.65. *a*) $\pm(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$, *b*) $+(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

2.66. arc cos 1/3 o 70°32′

2.67. $\pm(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})/5$

2.69. *a*) 15, *b*) 13

2.74. *a*) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = p$ donde $\mathbf{n} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}| = \mathbf{A}/A$, *b*) $A_1x + A_2y + A_3z = Ap$

2.76. *a*) Esfera con centro en (x_1, y_1, z_1) y radio = 3.

b) Plano perpendicular a $\mathbf{a}$ que pasa por su punto terminal.

c) Esfera con centro en $(x_1/2, y_1/2, z_1/2)$ y radio $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}/2$; o esfera con diámetro = $\mathbf{a}$.

2.77. *a*) $(\text{r} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$ o bien $2x + 3y + 6z = -28$; *b*) 5

2.78. *a*) $-8\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$, *b*) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, *c*) $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, *d*) $\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, *e*) $2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

2.79. *a*) $\sqrt{195}$, *b*) $-25\mathbf{i} + 34\mathbf{j} - 55\mathbf{k}$, *c*) $2\sqrt{195}$

2.80. *a*) $5\sqrt{26}$, *b*) $3\sqrt{10}$, *c*) -20, *d*) -20, *e*) $-40\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$, *f*) $35\mathbf{i} - 35\mathbf{j} + 35\mathbf{k}$

2.82. *a*) $5\sqrt{3}$, *b*) 12

2.83. *a*) $\sqrt{165}/2$, *b*) 21

2.84. $\pm[5\sqrt{3}/3](\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

2.86. *a*) $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, *b*) $-3(6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$

2.87. $-5\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$

2.88. *a*) $2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, *b*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

2.90. *a*) 7, *b*) 12

2.92. *a*) $a = -4$, *b*) $a = -13$

2.95. 3

2.96. *a*) 3, *b*) 13

2.97. $3\sqrt{2}$

2.102. *a*) $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, $-\frac{8}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{7}{3}\mathbf{k}$, $-\frac{7}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{5}{3}\mathbf{k}$
b) $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/28$, $(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})/28$, $(\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 11\mathbf{k})/28$

CAPÍTULO 3

Diferenciación vectorial

3.1 INTRODUCCIÓN

El lector está familiarizado con la diferenciación de funciones de una variable, $f(x)$ evaluadas con números reales. En específico tenemos:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aquí extenderemos esta definición a funciones de una variable evaluadas con vectores.

3.2 DERIVADAS ORDINARIAS DE FUNCIONES DE VARIABLE VECTORIAL

Suponga que $\mathbf{R}(u)$ es un vector que depende de una variable escalar u. Entonces

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

donde Δu denota un incremento en u, como se ilustra en la figura 3-1.

La derivada ordinaria del vector $\mathbf{R}(u)$ con respecto al escalar u está dada como sigue cuando existe el límite

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

Como $d\mathbf{R}/du$ es un vector que depende de u, consideramos su derivada con respecto del escalar u. Si dicha derivada existe la denotaremos con $d^2\mathbf{R}/du^2$. Las derivadas de orden superior se describen en una forma similar.

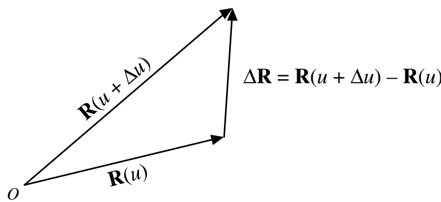


Figura 3-1

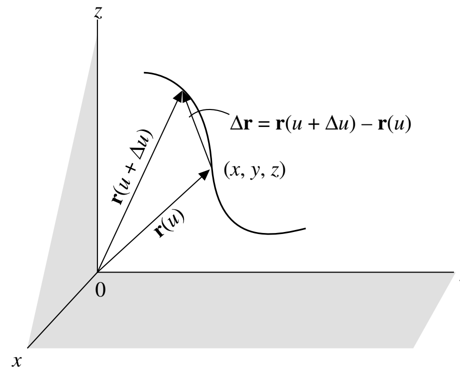


Figura 3-2

Curvas en el espacio

Considere ahora al vector de posición $\mathbf{r}(u)$ que une al origen O de un sistema de coordenadas con cualquier punto (x, y, z). Entonces

$$\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$$

y la especificación de la función vectorial $\mathbf{r}(u)$ define a x, y y z como funciones de u.

A medida que u cambia, el punto terminal de $\mathbf{r}$ describe una *curva en el espacio* cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

Entonces, la expresión siguiente es un vector en la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ si $\Delta u > 0$, y en la dirección de $-\Delta\mathbf{r}$ si $\Delta u < 0$ [como se ilustra en la figura 3-2]:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u}$$

Suponga que

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$$

existe. Entonces, el límite será un vector en la dirección de la tangente a la curva en el espacio en (x, y, z) y está dado por

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

Movimiento: velocidad y aceleración

Suponga que una partícula P se mueve a lo largo de una curva, C, en el espacio cuyas ecuaciones paramétricas son $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$, donde t representa al tiempo. Entonces, el vector de posición de la partícula P a lo largo de la curva es

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

En tal caso, la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula P están dadas por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 3.1 Suponga que una partícula P se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas, en las que t representa al tiempo, son las siguientes:

$$x = 40t^2 + 8t, \quad y = 2\cos 3t \quad \text{y} \quad z = 2\,\text{sen}\, 3t$$

a) Determine su velocidad y aceleración en cualquier momento.
b) Encuentre las magnitudes de la velocidad y la aceleración en $t = 0$.

a) El vector de posición de la partícula P es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (40t^2 + 8t)\mathbf{i} + (2\cos 3t)\mathbf{j} + (2\,\text{sen}\, 3t)\mathbf{k}$$

Entonces, la velocidad **v** y la aceleración **a** de P son:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (80t + 8)\mathbf{i} + (-6 \operatorname{sen} 3t)\mathbf{j} + (6 \cos 3t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 80\mathbf{i} + (-18 \cos 3t)\mathbf{j} + (-18 \operatorname{sen} 3t)\mathbf{k}.$$

b) En $t = 0$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 80\mathbf{i} - 18\mathbf{j}$. Las magnitudes de la velocidad **v** y la aceleración **a** son:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = 10 \quad \text{y} \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{(80)^2 + (-18)^2} = 82$$

3.3 CONTINUIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

Una función escalar $\phi(u)$ es *continua* en u si

$$\lim_{\Delta u \to 0} \phi(u + \Delta u) = \phi(u)$$

En forma equivalente, $\phi(u)$ es continua en u si, para cada número positivo ϵ, es posible encontrar un número positivo δ tal que

$$\left|\phi(u + \Delta u) - \phi(u)\right| < \epsilon \quad \text{siempre y cuando} \quad \left|\Delta u\right| < \delta$$

Una función vectorial $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ es *continua* en u si las tres funciones $R_1(u)$, $R_2(u)$ y $R_3(u)$ son continuas en u o si $\lim_{\Delta u \to 0} \mathbf{R}(u + \Delta u) = \mathbf{R}(u)$. De manera equivalente, $\mathbf{R}(u)$ es continua en u si para cada número positivo ϵ es posible encontrar un número positivo δ tal que

$$\left|\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)\right| < \epsilon \quad \text{siempre y cuando} \quad \left|\Delta u\right| < \delta$$

Una función escalar o vectorial es *diferenciable de orden n* si su n-ésima derivada existe. Una función diferenciable necesariamente es continua, pero no a la inversa. A menos que se diga otra cosa, supondremos que todas las funciones consideradas en el texto son diferenciables hasta el orden que sea necesario en un análisis particular.

Se aplica la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.1 Suponga que **A**, **B** y **C** son funciones vectoriales diferenciables de un escalar u, y que ϕ es una función escalar diferenciable de u. Entonces se cumplen las leyes siguientes:

i) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\mathbf{B}}{du}$

ii) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B}$

iii) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$

iv) $\dfrac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\dfrac{d\mathbf{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du}\mathbf{A}$

v) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \dfrac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

vi) $\dfrac{d}{du}\{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} = \mathbf{A} \times \left(\mathbf{B} \times \dfrac{d\mathbf{C}}{du}\right) + \mathbf{A} \times \left(\dfrac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C}\right) + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

En la proposición 3.1 el orden de los productos puede ser importante.

EJEMPLO 3.2 Suponga que $\mathbf{A} = 5u^2\mathbf{i} + u\mathbf{j} - u^3\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B} = \text{sen } u\mathbf{i} - \cos u\mathbf{j}$. Encuentre $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\\ &= (5u^2\mathbf{i} + u\mathbf{j} - u^3\mathbf{k})\cdot(\cos u\mathbf{i} + \text{sen } u\mathbf{j}) + (10u\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3u^2\mathbf{k})\cdot(\text{sen } u\mathbf{i} - \cos u\mathbf{j})\\ &= [5u^2\cos u + u\,\text{sen } u] + [10u\,\text{sen } u - \cos u]\\ &= (5u^2 - 1)\cos u + 11u\,\text{sen } u\end{aligned}$$

Otro método

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5u^2\,\text{sen } u - u\cos u$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \frac{d}{du}(5u^2\,\text{sen } u - ut\cos u) = 5u^2\cos u + 10u\,\text{sen } u + u\,\text{sen } u - \cos u\\ &= (5u^2 - 1)\cos u + 11u\,\text{sen } u\end{aligned}$$

3.4 DERIVADAS PARCIALES DE VECTORES

Suponga que **A** es un vector que depende de más de una variable, por ejemplo de x, y y z. Entonces, escribimos $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$. La derivada parcial de **A** con respecto de x se denota y define como sigue, cuando existe el límite:

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{A}(x+\Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

De manera similar, las derivadas parciales de **A** con respecto de y y z son las siguientes, respectivamente, cuando existe el límite:

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\mathbf{A}(x, y+\Delta y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathbf{A}(x, y, z+\Delta z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

Los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de funciones de una variable se extienden a funciones de dos o más variables. Por ejemplo, $\phi(x, y)$ es continua en (x, y) si

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\phi(x+\Delta x, y+\Delta y) = \phi(x, y)$$

o si para cada número positivo ϵ es posible encontrar un número positivo δ tal que

$$|\phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \phi(x, y)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |\Delta x| < \delta \quad \text{y que} \quad |\Delta y| < \delta$$

Se aplican definiciones similares para funciones vectoriales de más de dos variables.

Para funciones de dos o más variables utilizamos el término *diferenciable* para indicar que la función tiene primeras derivadas parciales continuas (otros autores emplean dicho término con un sentido un poco distinto).

Se definen derivadas de orden superior del mismo modo que en el cálculo. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial x\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}\right)$$

En el caso en que **A** tiene derivadas parciales continuas al menos de segundo orden, tenemos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}$$

Es decir, no importa el orden de diferenciación.

EJEMPLO 3.3 Suponga que $\phi(x, y, z) = xy^2z$ y $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Encuentre $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi A)$ en el punto $P(1, 2, 2)$.

$$\phi A = x^2y^2z\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + x^2y^3z\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi A) = x^2y^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2y^3\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\phi A) = 2xy^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2xy^3\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi A) = 2y^2\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{k}$$

Cuando $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$, $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi A) = 8\mathbf{i} + 16\mathbf{k}$.

Las reglas para la diferenciación parcial de vectores son similares a las del cálculo elemental para funciones escalares. En particular se aplica la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.2 Suponga que **A** y **B** son funciones vectoriales de x, y y z. Entonces, se cumplen las leyes que siguen:

i) $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B}$

ii) $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{B}$

iii) $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B}\right\}$

$= \mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} \cdot \mathbf{B}$, y así sucesivamente.

Las reglas para las diferenciales de vectores son, en esencia, las mismas que las del cálculo elemental, como se plantea en la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 3.3 Suponga que **A** y **B** son funciones de x, y y z. Entonces se cumplen las siguientes leyes.

i) Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, entonces $d\mathbf{A} = dA_1\mathbf{i} + dA_2\mathbf{j} + dA_3\mathbf{k}$

ii) $d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

iii) $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

iv) Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, entonces $d\mathbf{A} = d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}dz$, y así sucesivamente.

3.5 GEOMETRÍA DIFERENCIAL

La geometría diferencial involucra el estudio de curvas y superficies. Suponga que C es una curva en el espacio definida por la función $\mathbf{r}(u)$. Entonces, ya se vio que $d\mathbf{r}/du$ es un vector en la dirección de la tangente a C. Suponga que se toma el escalar u como la longitud de arco s medida a partir de algún punto fijo sobre C. Entonces, $d\mathbf{r}/ds$ es un vector unitario tangente a C y que se denota con $\mathbf{T}$ (vea la figura 3-3). La tasa de cambio de $\mathbf{T}$ con respecto de s es una medida de la curvatura de C y está dada por $d\mathbf{T}/ds$. La dirección de $d\mathbf{T}/ds$ en cualquier punto dado de C es

normal a la curva en dicho punto (vea el problema 3.9). Si **N** es un vector unitario en esa dirección normal, se denomina *normal principal* a la curva. Entonces, $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$, donde κ recibe el nombre de *curvatura* de C en el punto especificado. La cantidad $\rho = 1/\kappa$ se llama *radio de curvatura*.

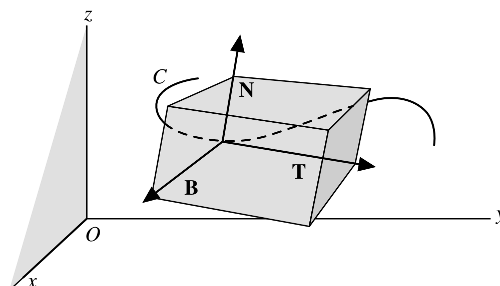


Figura 3-3

Un vector unitario **B** perpendicular al plano de **T** y **N**, y tal que $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, se llama *binormal* a la curva. Se concluye que las direcciones **T**, **N** y **B** forman un sistema de coordenadas rectangulares de mano derecha en cualquier punto especificado de C. Este sistema de coordenadas recibe el nombre de *triedro* o *tríada* en el punto. A medida que s cambia, el sistema de coordenadas se mueve y se conoce como *triedro móvil*.

Fórmulas de Frenet-Serret

Existe un conjunto de relaciones que involucran a las derivadas de los vectores fundamentales **T**, **N** y **B**, y que se conocen como *fórmulas de Frenet-Serret*, y están dadas por

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

donde τ es un escalar llamado *torsión*. La cantidad $\sigma = 1/\tau$ recibe el nombre de *radio de torsión*.

El *plano basculante* en el punto P de una curva, es aquel que contiene a la tangente y la normal principal en P. El *plano normal* es el que pasa por P y es perpendicular a la tangente. El *plano rectificador* (o de rectificación) es el que pasa por P y es perpendicular a la normal principal.

Mecánica

Es frecuente que la mecánica incluya el estudio del movimiento de partículas a lo largo de curvas (esta disciplina se conoce como *cinemática*). En esta área son valiosos algunos resultados de la geometría diferencial.

La *dinámica* considera el estudio de las fuerzas que actúan sobre objetos en movimiento. En este campo es fundamental la famosa ley de Newton que afirma que si **F** es la fuerza neta que actúa sobre un objeto de masa m que se mueve con velocidad **v**, entonces

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

donde $m\mathbf{v}$ es el momento del objeto. Si m es constante, ésta se convierte en $\mathbf{F} = m(d\mathbf{v}/dt) = m\mathbf{a}$, donde **a** es la aceleración del objeto.

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Suponga que $\mathbf{R}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$, donde x, y y z son funciones diferenciables de un escalar u. Demuestre que

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}.$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{du} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}\\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{[x(u+\Delta u)\mathbf{i} + y(u+\Delta u)\mathbf{j} + z(u+\Delta u)\mathbf{k}] - [x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}]}{\Delta u}\\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}\mathbf{i} + \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}\mathbf{j} + \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u}\mathbf{k}\\ &= \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}\end{aligned}$$

3.2. Dado $\mathbf{R} = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + (4\tau)\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$, *b*) $\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt}$, *c*) $\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right|$ y *d*) $\left|\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt}\right|$.

Solución

a) $\dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3\cos t)\mathbf{i} + \dfrac{d}{dt}(3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + \dfrac{d}{dt}(4t)\mathbf{k} = (-3\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$

b) $\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}(-3\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + \dfrac{d}{dt}(3\cos t)\mathbf{j} + \dfrac{d}{dt}(4)\mathbf{k} = (-3\cos t)\mathbf{i} + (-3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}.$

c) $\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = [(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (3\cos t)^2 + (4)^2]^{1/2} = 5.$

d) $\left|\dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt}\right| = [(-3\cos t)^2 + (-3\,\text{sen}\,t)^2 + (0)^2]^{1/2} = 3.$

3.3. Una partícula se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = e^{-t}$, $y = 2\cos 3t$, y $z = 2\,\text{sen}\,3t$, donde t es el tiempo.

a) Determine su velocidad y aceleración en cualquier instante.

b) Encuentre las magnitudes de la velocidad y aceleración en $t = 0$.

Solución

a) El vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = e^{-t}\mathbf{i} + 2\cos 3t\mathbf{j} + 2\,\text{sen}3t\mathbf{k}$. Entonces la velocidad es $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = e^{-t}\mathbf{i} - 6\,\text{sen}\,3t\mathbf{j} + 6\cos 3t\mathbf{k}$ y la aceleración es $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = e^{-t}\mathbf{i} - 18\cos 3t\mathbf{j} - 18\,\text{sen}\,3t\mathbf{k}$.

b) En $t = 0$, $d\mathbf{r}/dt = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ y $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{i} - 18\mathbf{j}$. Entonces

La magnitud de la velocidad en $t = 0$ es $\sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{37}$

La magnitud de la aceleración en $t = 0$ es $\sqrt{(1)^2 + (-18)^2} = \sqrt{325}$.

3.4. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ y $z = -t - 5$, donde t es el tiempo. Encuentre las componentes de su velocidad y aceleración en el momento $t = 1$ en la dirección $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned}\text{Velocidad} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(2t^2)\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + (-t-5)\mathbf{k}]\\ &= (4t)\mathbf{i} + (2t-4)\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{en } t = 1.\end{aligned}$$

El vector unitario en la dirección $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ es $\dfrac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$

Entonces, la componente en la dirección dada es $(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = 2$

$$\text{Aceleración} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}[(4t)\mathbf{i} + (2t - 4)\mathbf{j} - \mathbf{k}] = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Entonces, la componente de la aceleración en la dirección dada es $(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = 0$.

3.5. Una curva C está definida por sus ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$ y $z = z(s)$, donde s es la longitud de arco de C medido a partir de un punto fijo sobre C. Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de cualquier punto sobre C, demuestre que $d\mathbf{r}/ds$ es un vector unitario tangente a C.

Solución

El vector

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

es tangente a la curva $x = x(s)$, $y = y(s)$ y $z = z(s)$. Para demostrar que tiene magnitud unitaria, observe que

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1$$

ya que $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, que es un resultado del cálculo.

3.6. *a*) Encuentre el vector unitario tangente a cualquier punto sobre la curva $x = t^2 - t$, $y = 4t - 3$ y $z = 2t^2 - 8t$.

b) Determine la tangente unitaria en el punto en que $t = 2$.

Solución

a) Una tangente a la curva en cualquier punto es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(t^2 - t)\mathbf{i} + (4t - 3)\mathbf{j} + (2t^2 - 8t)\mathbf{k}] = (2t - 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t - 8)\mathbf{k}.$$

La magnitud del vector es $|d\mathbf{r}/dt| = [(2t - 1)^2 + (4)^2 + (4t - 8)^2]^{1/2}$. Entonces, el vector unitario tangente requerido es

$$\mathbf{T} = [(2t - 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t - 8)\mathbf{k}]/[(2t - 1)^2 + (4)^2 + (4t - 8)^2]^{1/2}.$$

Note que como $|d\mathbf{r}/dt| = ds/dt$, se tiene que

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

b) En $t = 2$, el vector unitario tangente es $\mathbf{T} = \dfrac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2 + 0^2}} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.

3.7. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciables de un escalar u. Demuestre que:

a) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B}$, *b*) $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$

Solución

a) $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B})-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}+\Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}+\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B}+\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}+\frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

Otro método

Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$$
$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du}+A_2\frac{dB_2}{du}+A_3\frac{dB_3}{du}\right)+\left(\frac{dA_1}{du}B_1+\frac{dA_2}{du}B_2+\frac{dA_3}{du}B_3\right)$$
$$= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}+\frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

b) $$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})\times(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B})-\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}+\Delta\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\Delta\mathbf{A}\times\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$
$$= \lim_{\Delta u\to 0}\mathbf{A}\times\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}+\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\mathbf{B}+\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\times\Delta\mathbf{B}$$
$$= \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du}+\frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

Otro método

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d}{du}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

Con el uso de cierto teorema sobre la diferenciación de un determinante, el resultado anterior se convierte en

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ \dfrac{dB_1}{du} & \dfrac{dB_2}{du} & \dfrac{dB_3}{du}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{dA_1}{du} & \dfrac{dA_2}{du} & \dfrac{dA_3}{du}\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du}+\frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

3.8. Suponga que $\mathbf{A} = 5t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}-t^3\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{j}$. Encuentre: *a*) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ y *b*) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})$.

Solución

a) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$$
$$= (5t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}-t^3\mathbf{k})\cdot(\cos t\mathbf{i}+\operatorname{sen} t\mathbf{j})+(10t\mathbf{i}+\mathbf{j}-3t^2\mathbf{k})\cdot(\operatorname{sen} t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j})$$
$$= 5t^2\cos t+t\operatorname{sen} t+10t\operatorname{sen} t-\cos t = (5t^2-1)\cos t+11t\operatorname{sen} t$$

Otro método

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 5t^2 \operatorname{sen} t - t\cos t$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(5t^2 \operatorname{sen} t - t\cos t) = 5t^2\cos t + 10t\operatorname{sen} t + t\operatorname{sen} t - \cos t$$
$$= (5t^2 - 1)\cos t + 11t\operatorname{sen} t$$

b) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \operatorname{sen} t & -\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [t^3\operatorname{sen} t\mathbf{i} - t^3\cos t\mathbf{j} + (5t^2\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{k}]$$
$$+ [-3t^2\cos t\mathbf{i} - 3t^2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + (-10t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}]$$
$$= (t^3\operatorname{sen} t - 3t^2\cos t)\mathbf{i} - (t^3\cos t + 3t^2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (5t^2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t - 11t\cos t)\mathbf{k}$$

Otro método

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \operatorname{sen} t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -t^3\cos t\mathbf{i} - t^3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + (-5t^2\cos t - t\operatorname{sen} t)\mathbf{k}$$

Entonces $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (t^3\operatorname{sen} t - 3t^2\cos t)\mathbf{i} - (t^3\cos t + 3t^2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (5t^2\operatorname{sen} t - 11t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$$

c) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$
$$= 2(5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k})\cdot(10t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}) = 100t^3 + 2t + 6t^5$$

Otro método

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (5t^2)^2 + (t)^2 + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6$

Entonces $\frac{d}{dt}(25t^4 + t^2 + t^6) = 100t^3 + 2t + 6t^5$.

3.9. Suponga que **A** tiene magnitud constante. Demuestre que A · $dA/dt = 0$ y que **A** y $d\mathbf{A}/dt$ son perpendiculares, siempre y cuando $|d\mathbf{A}/dt| \neq 0$.

Solución

Como **A** tiene magnitud constante, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} =$ constante.

Entonces, $$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

Por lo que $\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ y **A** es perpendicular a $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ siempre que $\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right| \neq 0$.

3.10. Suponga que **A**, **B** y **C** son funciones diferenciales de un escalar u. Demuestre que

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}.$$

Solución

De acuerdo con los problemas 3.7*a*) y 3.7*b*), $$\frac{d}{du}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d}{du}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right] + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$
$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

3.11. Una partícula se mueve de modo que su vector de posición está dado por $\mathbf{r} = \cos \omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, donde ω es una constante. Demuestre que *a*) la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es perpendicular a $\mathbf{r}$, *b*) la aceleración $\mathbf{a}$ está dirigida hacia el origen y tiene una magnitud proporcional a la distancia a éste y *c*) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ = un vector constante.

Solución

a) $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\mathbf{j}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= [\cos \omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}]\cdot[-\omega \operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\mathbf{j}]\\ &= (\cos \omega t)(-\omega \operatorname{sen} \omega t) + (\operatorname{sen} \omega t)(\omega \cos \omega t) = 0\end{aligned}$$

y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares.

b) $$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\omega^2 \cos \omega t\mathbf{i} - \omega^2 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}\\ &= -\omega^2[\cos \omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}] = -\omega^2\mathbf{r}\end{aligned}$$

Entonces, la aceleración es opuesta a la dirección de $\mathbf{r}$, es decir, se dirige hacia el origen. Su magnitud es proporcional a $|\mathbf{r}|$, que es la distancia al origen.

c) $$\begin{aligned}\mathbf{r}\times\mathbf{v} &= [\cos \omega t\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}] \times [-\omega \operatorname{sen} \omega t\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\mathbf{j}]\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos \omega t & \operatorname{sen} \omega t & 0\\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \omega \cos \omega t & 0\end{vmatrix}\\ &= \omega(\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)\mathbf{k}\\ &= \omega\mathbf{k}, \quad \text{que es un vector constante.}\end{aligned}$$

Físicamente se trata del movimiento de una partícula sobre una circunferencia, con velocidad angular constante ω. La aceleración, dirigida hacia el centro del círculo, es la *aceleración centrípeta*.

3.12. Demuestre que $\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = A\dfrac{dA}{dt}$.

Solución

Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Entonces, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{-1/2}\left(2A_1\frac{dA_1}{dt} + 2A_2\frac{dA_2}{dt} + 2A_3\frac{dA_3}{dt}\right)\\ &= \frac{A_1\dfrac{dA_1}{dt} + A_2\dfrac{dA_2}{dt} + A_3\dfrac{dA_3}{dt}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}}\\ &= \frac{\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}}{A}, \quad \text{por lo que} \quad A\frac{dA}{dt} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}\end{aligned}$$

Otro método

Como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$, $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \dfrac{d}{dt}(A^2)$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} = 2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(A^2) = 2A\frac{dA}{dt}$$

Entonces $\quad 2\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = 2A\dfrac{dA}{dt} \quad$ o $\quad \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = A\dfrac{dA}{dt}$.

Observe que si $\mathbf{A}$ es un vector constante, entonces $\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$, como en el problema 3.9.

3.13. Sea $\mathbf{A} = (2x^2y - x^4)\mathbf{i} + (e^{xy} - y \operatorname{sen} x)\mathbf{j} + (x^2 \cos y)\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$ y *b*) $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$.

Solución

a)
$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} - y \operatorname{sen} x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y)\mathbf{k}$$
$$= (4xy - 4x^3)\mathbf{i} + (ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + 2x\cos y\mathbf{k}$$

b)
$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} - y \operatorname{sen} x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cos y)\mathbf{k}$$
$$= 2x^2\mathbf{i} + (xe^{xy} - \operatorname{sen} x)\mathbf{j} - x^2 \operatorname{sen} y\mathbf{k}$$

3.14. Sea $\mathbf{A}$ el vector del problema 3.13. Encuentre: *a*) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2}$ y *b*) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2}$.

Solución

a)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(2x\cos y)\mathbf{k}$$
$$= (4y - 12x^2)\mathbf{i} + (y^2e^{xy} + y\operatorname{sen} x)\mathbf{j} + 2\cos y\mathbf{k}$$

b)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} - \operatorname{sen} x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$$
$$= 0 + x^2e^{xy}\mathbf{j} - x^2\cos y\mathbf{k} = x^2e^{xy}\mathbf{j} - x^2\cos y\mathbf{k}$$

3.15. Sea $\mathbf{A}$ el vector del problema 3.13. Encuentre: *a*) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y}$ y *b*) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}$.

Solución

a)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} - \operatorname{sen} x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$$
$$= 4x\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x\operatorname{sen} y\mathbf{k}$$

b)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - y\cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y)\mathbf{k}$$
$$= 4x\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x\operatorname{sen} y\mathbf{k}$$

Observe que $\partial^2\mathbf{A}/\partial y \partial x = \partial^2\mathbf{A}/\partial x \partial y$, es decir que el orden de diferenciación es intrascendente. Esto es en general verdadero si $\mathbf{A}$ tiene derivadas parciales continuas de, al menos, segundo orden.

3.16. Suponga que $\phi(x, y, z) = xy^2z$ y que $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Encuentre $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi\mathbf{A})$ en el punto $(2, -1, 1)$.

Solución

$$\phi\mathbf{A} = (xy^2z)(xz\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}) = x^2y^2z^2\mathbf{i} - x^2y^4z\mathbf{j} + xy^3z^3\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z^2\mathbf{i} - x^2y^4z\mathbf{j} + xy^3z^3\mathbf{k}) = 2x^2y^2z\mathbf{i} - x^2y^4\mathbf{j} + 3xy^3z^2\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2z\mathbf{i} - x^2y^4\mathbf{j} + 3xy^3z^2\mathbf{k}) = 4xy^2z\mathbf{i} - 2xy^4\mathbf{j} + 3y^3z^2\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^2z\mathbf{i} - 2xy^4\mathbf{j} + 3y^3z^2\mathbf{k}) = 4y^2z\mathbf{i} - 2y^4\mathbf{j}$$

Si $x = 2$, $y = -1$ y $z = 1$, el resultado se convierte en $4(-1)^2(1)\mathbf{i} - 2(-1)^4\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

3.17. Sea **F** que depende de x, y, z y t, donde x, y y z dependen de t. Demuestre que

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

con suposiciones razonables sobre diferenciabilidad.

Solución

Suponga que $\mathbf{F} = F_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + F_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + F_3(x, y, z, t)\mathbf{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= dF_1\mathbf{i} + dF_2\mathbf{j} + dF_3\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial F_1}{\partial t}dt + \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t}dt + \frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial F_3}{\partial t}dt + \frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz\right]\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\mathbf{k}\right)dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)dz \\
&= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}dt + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}dz
\end{aligned}$$

por lo que $\dfrac{d\mathbf{F}}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$.

Geometría diferencial

3.18. Demuestre las fórmulas de Frenet-Serret: *a*) $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, *b*) $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$ y *c*) $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$.

Solución

a) Como $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$, se concluye, del problema 3.9, que $\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$, es decir: $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ es perpendicular a **T**.

Si **N** es un vector unitario en la dirección $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$, entonces $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$. Decimos que **N** es la *normal principal*, κ es la *curvatura* y $\rho = 1/\kappa$ es el *radio de curvatura*.

b) Sea $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$, por lo que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\times\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} + \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} + \kappa\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\dfrac{d\mathbf{N}}{ds}$.

Entonces $\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\times\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$, por lo que **T** es perpendicular a $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$.

Pero como $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = 1$, se concluye que $\mathbf{B}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$ (vea el problema 3.9), de modo que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ es perpendicular a **B** y está en el plano de **T** y **N**.

Como $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}$ está en el plano de **T** y **N** y es perpendicular a **T**, debe ser paralelo a **N**; entonces, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$. Denominamos a **B** la *binormal*, τ es la *torsión* y $\sigma = 1/\tau$ es el *radio de torsión*.

c) Como **T**, **N** y **B** forman un sistema de mano derecha, también lo hacen **N**, **B** y **T**, es decir: $\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T}$.

Entonces, $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} + \dfrac{d\mathbf{B}}{ds}\times\mathbf{T} = \mathbf{B}\times\kappa\mathbf{N} - \tau\mathbf{N}\times\mathbf{T} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$.

3.19. Demuestre que el radio de curvatura de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = x(s)$, $y = y(s)$ y $z = z(s)$, está dado por

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Solución

El vector de posición de cualquier punto sobre la curva es $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}.$$

Pero $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$, por lo que

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

y se llega al resultado, ya que $\rho = 1/\kappa$.

3.20. Demuestre que $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \dfrac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \dfrac{\tau}{\rho^2}$.

Solución

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \kappa\frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa(\tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}) + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= \mathbf{T} \cdot \kappa\mathbf{N} \times \left(\kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}\right) \\
&= \mathbf{T} \cdot \left(\kappa^2\tau\mathbf{N} \times \mathbf{B} - \kappa^3\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa\frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} \times \mathbf{N}\right) \\
&= \mathbf{T} \cdot (\kappa^2\tau\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{B}) \\
&= \kappa^2\tau = \frac{\tau}{\rho^2}
\end{aligned}$$

El resultado puede escribirse así:

$$\tau = \left[(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2\right]^{-1} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

donde los apóstrofos denotan derivadas con respecto de s, con el empleo del resultado del problema 3.19.

3.21. Dada la curva en el espacio $x = t, y = t^2$ y $z = \frac{2}{3}t^3$. Encuentre: *a*) la curvatura κ y *b*) la torsión τ.

Solución

a) El vector de posición es $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 1 + 2t^2$$

y

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{(1 + 2t^2)(2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k})(4t)}{(1 + 2t^2)^2} = \frac{-4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}$$

Por lo que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^3}.$$

Como $d\mathbf{T}/ds = k\mathbf{N}$,

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{\sqrt{(-4t)^2 + (2 - 4t^2)^2 + (4t)^2}}{(1 + 2t^2)^3} = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$$

b) Del inciso *a*), $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{-2t\mathbf{i} + (1 - 2t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}}{1 + 2t^2}$

De modo que

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{1}{1 + 2t^2} & \dfrac{2t}{1 + 2t^2} & \dfrac{2t^2}{1 + 2t^2} \\ \dfrac{-2t}{1 + 2t^2} & \dfrac{1 - 2t^2}{1 + 2t^2} & \dfrac{2t}{1 + 2t^2} \end{vmatrix} = \frac{2t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

Ahora $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = \dfrac{4t\mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}$ y $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \dfrac{4t\mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^3}$

También, $-\tau\mathbf{N} = -\tau\left[\dfrac{-2t\mathbf{i} + (1 - 2t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}}{1 + 2t^2}\right]$. Como $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$, se encuentra que $\tau = \dfrac{2}{(1 + 2t^2)^2}$.

Observe que para esta curva $\kappa = \tau$.

3.22. Para la curva del problema 3.21, en el punto $t = 1$, encuentre ecuaciones en forma vectorial y rectangular para: *a*) la tangente, *b*) la normal principal y *c*) la binormal.

Solución

Sea que $\mathbf{T}_O$, $\mathbf{N}_O$ y $\mathbf{B}_O$ denoten los vectores tangente, normal principal y binormal, en el punto requerido. Entonces, del problema 3.21,

$$\mathbf{T}_O = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}, \quad \mathbf{N}_O = \frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_O = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

Si $\mathbf{A}$ denota un vector dado mientras que $\mathbf{r}_O$ y $\mathbf{r}$ denotan, respectivamente, los vectores de posición del punto inicial y un punto arbitrario de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_O$ es paralelo a $\mathbf{A}$, por lo que la ecuación de $\mathbf{A}$ es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Entonces,

la ecuación de la tangente es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{T}_O = \mathbf{0}$

la ecuación de la normal principal es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{N}_O = \mathbf{0}$

la ecuación de la binormal es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{B}_O = \mathbf{0}$

En forma rectangular, con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_O = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, éstas se convierten, respectivamente, en:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2/3}{2}, \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2/3}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2/3}{1}.$$

Estas ecuaciones también pueden escribirse en forma paramétrica (vea el problema 1.28 del capítulo 1).

3.23. Elabore un bosquejo de la curva en el espacio $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$ y $z = 4t$, y encuentre: *a*) la tangente unitaria **T**, *b*) la normal principal **N**, la curvatura k y el radio de curvatura ρ y *c*) la binormal **B**, la torsión τ y el radio de torsión σ.

Solución

La curva en el espacio es una *hélice circular* (vea la figura 3-4). Como $t = z/4$, las ecuaciones de la curva son $x = 3\cos(z/4)$ y $y = 3\,\text{sen}(z/4)$ por lo que se encuentra sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

a) El vector de posición para cualquier punto sobre la curva es

$$\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

Entonces, $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} = 5$$

Así, $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = -\dfrac{3}{5}\text{sen}\,t\mathbf{i} + \dfrac{3}{5}\cos t\mathbf{j} + \dfrac{4}{5}\mathbf{k}.$

b) $\dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{3}{5}\text{sen}\,t\mathbf{i} + \dfrac{3}{5}\cos t\mathbf{j} + \dfrac{4}{5}\mathbf{k}\right) = -\dfrac{3}{5}\cos t\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\text{sen}\,t\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{25}\cos t\mathbf{i} - \frac{3}{25}\text{sen}\,t\mathbf{j}$$

Como $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, $\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = |\kappa||\mathbf{N}| = \kappa$ por tanto $\kappa \geqq 0$.

Entonces $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{25}\cos t\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{25}\text{sen}\,t\right)^2} = \dfrac{3}{25}$ y $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{25}{3}.$

Para $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, obtenemos $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j}.$

c) $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{3}{5}\text{sen}\,t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\text{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}\text{sen}\,t\mathbf{i} - \frac{4}{5}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4}{5}\cos t\mathbf{i} + \frac{4}{5}\text{sen}\,t\mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4}{25}\cos t\mathbf{i} + \frac{4}{25}\text{sen}\,t\mathbf{j}$$

$$-\tau\mathbf{N} = -\tau(-\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j}) = \frac{4}{25}\cos t\mathbf{i} + \frac{4}{25}\text{sen}\,t\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{4}{25} \text{ y } \sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}.$$

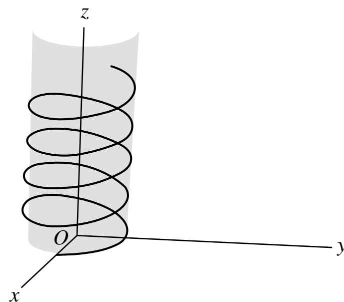


Figura 3-4

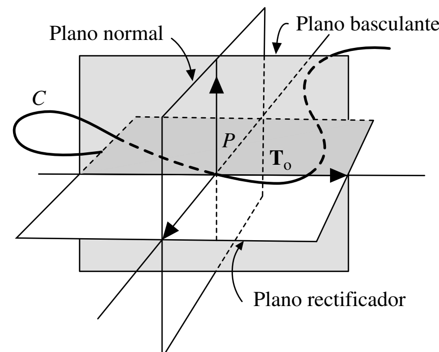


Figura 3-5

3.24. Encuentre ecuaciones en forma vectorial y rectangular para los planos: *a*) basculante, *b*) normal y *c*) rectificador, para la curva de los problemas 3.21 y 3.22, en el punto en que $t = 1$.

Solución

a) El plano basculante es aquel que contiene a la tangente y a la normal principal. Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de cualquier punto en dicho plano, y $\mathbf{r}_O$ es el vector de posición del punto $t = 1$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_O$ es perpendicular a $\mathbf{B}_O$, la binormal en el punto $t = 1$, es decir: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \cdot \mathbf{B}_O = 0$.

b) El plano normal es el que es perpendicular al vector tangente en el punto dado. Entonces, la ecuación requerida es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \cdot \mathbf{T}_O = 0$.

c) El plano rectificador es perpendicular a la normal principal en el punto dado. La ecuación requerida es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) \cdot \mathbf{N}_O = 0$.

En forma rectangular, las ecuaciones de los incisos *a*), *b*) y *c*) son, respectivamente,

$$2(x-1) - 2(y-1) + 1(z - 2/3) = 0,$$
$$1(x-1) + 2(y-1) + 2(z - 2/3) = 0,$$
$$-2(x-1) - 1(y-1) + 2(z - 2/3) = 0.$$

La figura 3-5 muestra los planos basculante, normal y rectificador para la curva C en el punto P.

3.25. *a*) Demuestre que la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ representa una superficie.

b) Demuestre que $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ representa un vector normal a la superficie.

Solución

a) Si se considera que u tiene un valor fijo, digamos u_O, entonces $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_O, v)$ representa una curva que se puede denotar con $u = u_O$. De manera similar, $u = u_1$ define otra curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, v)$. Entonces, a medida que varía u, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ representa una curva que se mueve en el espacio y genera una superficie S. Así, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ representa a la superficie S generada, como se ilustra en la figura 3-6*a*).

Las curvas $u = u_O$, $u = u_1$, … representan curvas definidas sobre la superficie. De manera similar $v = v_O$ y $v = v_1$ representan curvas sobre la superficie.

Al asignar valores definidos a u y v, obtenemos un punto sobre la superficie. Por ejemplo, las curvas $u = u_O$ y $v = v_O$ intersecan y definen el punto (u_O, v_O) sobre la superficie. Nos referimos a la pareja de números (u, v) como los que definen las *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie. Si todas las curvas u = constante y v = constante, son perpendiculares a cada punto de intersección, llamamos *ortogonal* al sistema de coordenadas curvilíneas. Para un análisis más profundo de las coordenadas curvilíneas consulte el capítulo 7.

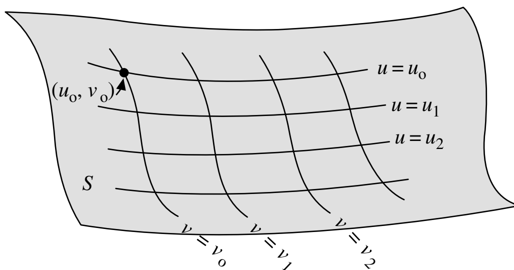


Figura 3-6*a*

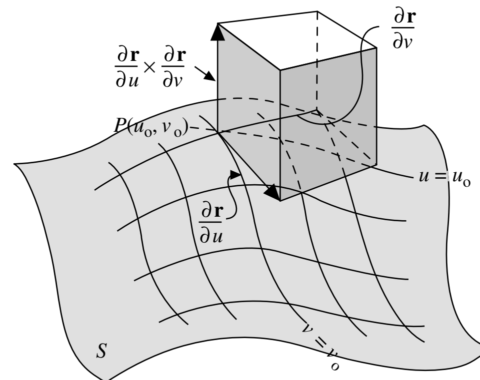


Figura 3-6*b*

b) Considere al punto P con coordenadas (u_O, v_O) sobre una superficie S, como se ilustra en la figura 3-6*b*). El vector $\partial\mathbf{r}/\partial u$ en P se obtiene con la diferenciación de $\mathbf{r}$ con respecto de u, manteniendo a v = constante = v_O. Según la teoría de curvas en el espacio, se concluye que $\partial\mathbf{r}/\partial u$ en P representa un vector tangente a la curva $v = v_O$ en P, como se ilustra en la figura. De manera similar, $\partial\mathbf{r}/\partial u$ en P representa un vector tangente a la

curva u = constante = u_O. Como $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$ representan vectores en P tangentes a las curvas que están en la superficie S en P, se concluye que estos vectores son tangentes a la superficie en P. Por tanto, se llega a que $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ es un vector normal a S en P.

3.26. Determine una normal unitaria a la superficie siguiente, donde $a > 9$:

$$\mathbf{r} = a\cos u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a\cos v\mathbf{k}$$

Solución

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = -a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v\mathbf{i} + a\cos u\operatorname{sen} v\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = a\cos u\cos v\mathbf{i} + a\operatorname{sen} u\cos v\mathbf{j} - a\operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

Entonces $$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v & a\cos u\operatorname{sen} v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\operatorname{sen} u\cos v & -a\operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$$= -a^2\cos u\operatorname{sen}^2 v\mathbf{i} - a^2\operatorname{sen} u\operatorname{sen}^2 v\mathbf{j} - a^2\operatorname{sen} v\cos v\mathbf{k}$$

representa un vector normal a la superficie en cualquier punto (u, v).

Una normal unitaria se obtiene al dividir $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ entre su magnitud, $\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{u}}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{v}}\right|$, dada por

$$\sqrt{a^4\cos^2 u\operatorname{sen}^4 v + a^4\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^4 v + a^4\operatorname{sen}^2 v\cos^2 v} = \sqrt{a^4(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen}^4 v + a^4\operatorname{sen}^2 v\cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^2 v(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v)}$$

$$= \begin{cases} a^2\operatorname{sen} v & \text{si } \operatorname{sen} v > 0 \\ -a^2\operatorname{sen} v & \text{si } \operatorname{sen} v < 0 \end{cases}$$

Entonces, hay dos normales unitarias dadas por

$$\pm(\cos u\operatorname{sen} v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k}) = \pm\mathbf{n}$$

Debe notarse que la superficie dada está definida por $x = a\cos u\operatorname{sen} v$, $y = a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$, $z = a\cos v$, por lo que se observa que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que es una esfera de radio a. Como $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$, se concluye que

$$\mathbf{n} = \cos u\operatorname{sen} v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k}$$

es la *normal unitaria dirigida hacia afuera* de la esfera en el punto (u, v).

3.27. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + 2xy^2 - 3z^3 = 6$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

Solución

La dirección **N** normal a una superficie $F(x, y, z) = k$, donde k es una constante, es:

$$\mathbf{N} = [F_x, F_y, F_z]$$

Se tiene que $F_x = 2x + 2y^2$, $F_y = 2x$, $F_z = 3z^2$. Entonces, en el punto P, la normal a la superficie (y al plano tangente) es $\mathbf{N}(P) = [10, 2, 3]$.

El plano tangente E en P tiene la forma $10x + 2y + 3z = b$. Al sustituir P en la ecuación se obtiene $b = 10 + 4 + 3 = 17$. Entonces, $10x + 2y + 3z = 17$ es la ecuación del plano tangente en P.

Mecánica

3.28. Demuestre que la aceleración **a** de una partícula que se mueve por una curva en el espacio con velocidad **v** está dada por

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

donde **T** es el vector unitario tangente a la curva en el espacio, **N** es su normal principal unitaria y ρ es el radio de curvatura.

Solución

Velocidad **v** = magnitud de **v** multiplicada por el vector unitario tangente **T**

o: $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Se deriva y queda,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

Pero según el problema 3.18*a*),

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{\rho}$$

Entonces,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{\rho}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

Esto demuestra que la componente de la aceleración es dv/dt en la dirección tangente a la trayectoria y v^2/ρ en la dirección de la normal principal a la trayectoria. Esta última aceleración con frecuencia es denominada *aceleración centrípeta*. Para un caso especial de esta situación vea el problema 3.11.

3.29. Si **r** es el vector de posición de una partícula de masa m relativo al punto O y **F** es la fuerza externa sobre la partícula, entonces $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ es el par de torsión o momento de **F** con respecto de O. Demuestre que $\mathbf{M} = d\mathbf{H}/dt$, donde $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ y **v** es la velocidad de la partícula.

Solución

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \text{ según la ley de Newton.}$$

$$\text{Pero } \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + 0$$

es decir: $$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

Note que el resultado se cumple ya sea que m es constante o no. **H** se llama *momento angular*. El resultado afirma que el par de torsión es igual a la tasa de cambio del momento angular con respecto del tiempo.

Este resultado se extiende con facilidad a un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, con fuerzas externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Para este caso, $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$ es el momento angular total, $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$ es el par total, y el resultado es $\mathbf{M} = \dfrac{d\mathbf{H}}{dt}$, como antes.

3.30. Un observador parado en un punto fijo respecto de un sistema de coordenadas xyz con origen O, como se ilustra en la figura 3-7, mira un vector $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y obtiene que su derivada con respecto del tiempo es $\dfrac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \dfrac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$. Más tarde se da cuenta de que en realidad él y su sistema de coordenadas giran con respecto de un sistema de coordenadas XYZ que se considera fijo en el espacio y cuyo origen también está en

O. Se pregunta, "¿Cuál sería la derivada de **A** con respecto del tiempo, para un observador que estuviera fijo en relación con el sistema de coordenadas XYZ?"

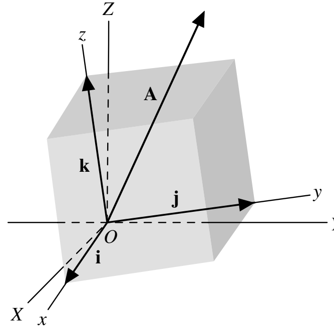


Figura 3-7

a) Sea que $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f$ y $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m$ denoten respectivamente las derivadas de **A** con respecto del tiempo para los sistemas fijo y móvil. Demuestre que existe una cantidad vectorial ω tal que

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

b) Sean D_f y D_m los símbolos de los operadores de la derivada con respecto del tiempo en los sistemas fijo y móvil, respectivamente. Demuestre la equivalencia de los operadores

$$D_f \equiv D_m + \boldsymbol{\omega}\times$$

Solución

a) Para el observador fijo, los vectores unitarios **i**, **j** y **k** en realidad cambian con el tiempo. Entonces, un observador calcularía la derivada del tiempo como:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{1}$$

$$\text{es decir,} \quad \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{2}$$

Como **i** es un vector unitario, $d\mathbf{i}/dt$ es perpendicular a **i** (vea el problema 3.9) y, por tanto, debe estar en el plano de **j** y **k**. Entonces,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k} \tag{3}$$

De manera similar,

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i} \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j} \tag{5}$$

De $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$, la diferenciación produce $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} = 0$. Pero, $\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_4$ de la ecuación (4) y $\frac{d\mathbf{i}}{d\mathbf{t}}\cdot\mathbf{j} = \alpha_1$ de la ecuación (3); entonces $\alpha_4 = -\alpha_1$.

En forma similar, de $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\quad \mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$ y $\alpha_5 = -\alpha_2$;

de $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$, $\quad \mathbf{j}\cdot\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 0$ y $\alpha_6 = -\alpha_3$.

Entonces, $\dfrac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}, \quad \dfrac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} - \alpha_1\mathbf{i}, \quad \dfrac{d\mathbf{k}}{dt} = -\alpha_2\mathbf{i} - \alpha_3\mathbf{j}$ y

$A_1\dfrac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\dfrac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\dfrac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_3)\mathbf{i} + (\alpha_1 A_1 - \alpha_3 A_3)\mathbf{j} + (\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2)\mathbf{k}$ que se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Entonces, si se hace $\alpha_3 = \omega_1$, $-\alpha_2 = \omega_2$ y $\alpha_1 = \omega_3$, el determinante se convierte en:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$. La cantidad $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de velocidad angular del sistema móvil con respecto del sistema fijo.

b) Por definición,

$$D_f\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \text{derivada en el sistema fijo}$$

$$D_m\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m = \text{derivada en el sistema móvil.}$$

Del inciso *a*),

$$D_f\mathbf{A} = D_m\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} + \mathbf{A} = (D_m + \boldsymbol{\omega}\times)\mathbf{A}$$

y se demuestra la equivalencia de los operadores $D_f \equiv D_m + \boldsymbol{\omega}\times$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.31. Suponga que $\mathbf{R} = e^{-t}\mathbf{i} + \ln(t^2 + 1)\mathbf{j} - \tan t\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $d\mathbf{R}/dt$, *b*) $d^2\mathbf{R}/dt^2$, *c*) $|d\mathbf{R}/dt|$ y *d*) $|d^2\mathbf{R}/dt^2|$ en $t = 0$.

3.32. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2\cos 3t$ y $z = 8t$, en cualquier momento $t > 0$.

a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula.
b) Calcule las magnitudes de la velocidad y la aceleración.

3.33. Encuentre un vector unitario tangente a cualquier punto de la curva $x = a\cos\omega t$, $y = a \operatorname{sen}\omega t$ y $z = bt$, donde a, b y ω son constantes.

3.34. Suponga que $\mathbf{A} = t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (2t + 1)\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B} = (2t - 3)\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$. Encuentre

a) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, *b*) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, *c*) $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ y *d*) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\right)$ en $t = 1$.

3.35. Suponga que $\mathbf{A} = \operatorname{sen} u\mathbf{i} + \cos u\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \cos u\mathbf{i} - \operatorname{sen} u\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Encuentre $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))$ en $u = 0$.

3.36. Demuestre que *a*) $\dfrac{d}{ds}\left(\mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} - \dfrac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\dfrac{d^2\mathbf{B}}{ds^2} - \dfrac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}\cdot\mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones diferenciales de s.

b) $\dfrac{d}{ds}\left(\mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} - \dfrac{d\mathbf{A}}{ds}\times\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\times\dfrac{d^2\mathbf{B}}{ds^2} - \dfrac{d^2\mathbf{A}}{ds^2}\times\mathbf{B}$

c) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{V}\cdot\dfrac{d\mathbf{V}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}\right) = \mathbf{V}\cdot\dfrac{d\mathbf{V}}{dt}\times\dfrac{d^3\mathbf{V}}{dt^3}$

3.37. Suponga que $\mathbf{A}(t) = 3t^2\mathbf{i} - (t + 4)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j} - 3\cos t\mathbf{k}$. Encuentre $\dfrac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ en $t = 0$.

3.38. Sea $\dfrac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = 6t\mathbf{i} - 24t^2\mathbf{j} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{k}$. Encuentre $\mathbf{A}$ dado que $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ en $t = 0$.

3.39. Demuestre que $\mathbf{r} = e^{-t}(\mathbf{C}_1\cos 2t + \mathbf{C}_2 \operatorname{sen} 2t)$, donde $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ son vectores constantes, es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + 5\mathbf{r} = 0$.

3.40. Demuestre que la solución general de la ecuación diferencial $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$, donde α y ω son constantes, es

a) $\mathbf{r} = e^{-at}\left(\mathbf{C}_1 e^{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t} + \mathbf{C}_2 e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\,t}\right)$ si $\alpha^2 - \omega^2 > 0$

b) $\mathbf{r} = e^{-at}(\mathbf{C}_1 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t + \mathbf{C}_2\cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\,t)$ si $\alpha^2 - \omega^2 < 0$.

c) $\mathbf{r} = e^{-at}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$ si $\alpha^2 - \omega^2 = 0$

donde $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ son vectores constantes arbitrarios.

3.41. Resuelva: *a*) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - 4\frac{d\mathbf{r}}{dt} - 5\mathbf{r} = 0$, *b*) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} = 0$ y *c*) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 4\mathbf{r} = 0$.

3.42. Resuelva: $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{X}$, $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathbf{Y}$.

3.43. Suponga que $\mathbf{A} = \cos xy\mathbf{i} + (3xy - 2x^2)\mathbf{j} - (3x + 2y)\mathbf{k}$. Encuentre $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x}$.

3.44. Si $\mathbf{A} = x^2yz\mathbf{i} - 2xz^3\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2z\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$. Encuentre $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ en (1, 0, –2).

3.45. Con $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ como vectores constantes y λ como escalar constante, demuestre que $\mathbf{H} = e^{-\lambda x}(\mathbf{C}_1 \operatorname{sen}\lambda y + \mathbf{C}_2\cos\lambda y)$ satisface la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2} = 0$.

3.46. Suponga que $\mathbf{p}_0$ es un vector constante, ω y c son escalares constantes y $i = \sqrt{-1}$. Demuestre que $\mathbf{A} = [\mathbf{p}_0 e^{i\omega(t-r/c)}]/r$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\mathbf{r}^2} + \frac{2}{\mathbf{r}}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$. [Este resultado tiene importancia en la teoría electromagnética.]

Geometría diferencial

3.47. Considere la curva en el espacio $x = t - t^3/3$, $y = t^2$ y $z = t + t^3/3$. Encuentre *a*) la tangente unitaria $\mathbf{T}$, *b*) la curvatura κ, *c*) la normal principal $\mathbf{N}$, *d*) la binormal $\mathbf{B}$ y *e*) la torsión τ.

3.48. Suponga que se define una curva en el espacio en términos del parámetro de la longitud de arco s, con las ecuaciones

$$x = \arctan s, \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(s^2+1) \quad \text{y} \quad z = s - \arctan s$$

Encuentre *a*) $\mathbf{T}$, *b*) $\mathbf{N}$, *c*) $\mathbf{B}$, *d*) κ, *e*) τ, *f*) ρ y *g*) σ.

3.49. Considere la curva en el espacio $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$ (llamada hélice cúbica). Encuentre κ y τ.

3.50. Demuestre que para una curva plana, la torsión $\tau = 0$.

3.51. Considere el radio de curvatura $\rho = 1/\kappa$ de una curva plana con ecuaciones $y = f(x)$ y $z = 0$, es decir, una curva en el plano xy. Demuestre que $\rho = \{[1 + (y')^2]^{3/2}\}/|y''|$.

3.52. Considere la curva con vector de posición $\mathbf{r} = a\cos u\mathbf{i} + b\operatorname{sen} u\mathbf{j}$, donde a y b son constantes positivas. Encuentre su curvatura κ y su radio de curvatura $\rho = 1/\kappa$. Interprete el caso en que $a = b$.

3.53. Demuestre que las fórmulas de Frenet-Serret se pueden escribir en la forma $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{T}$, $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}$ y $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B}$. También determine $\boldsymbol{\omega}$.

3.54. Pruebe que la curvatura de la curva en el espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ está dada numéricamente por $\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, donde los puntos denotan diferenciación con respecto de t.

3.55. *a*) Considere la curva en el espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Pruebe que $\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\times\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}$ para la curva en el espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

b) Suponga que el parámetro t es la longitud de arco s. Demuestre que

$$\tau = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{(d^2\mathbf{r}/ds^2)^2}.$$

3.56. Sea $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$. Demuestre que $\kappa = \dfrac{Q}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tau = \dfrac{\mathbf{Q} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{Q^2}$.

3.57. Encuentre κ y τ para la curva en el espacio $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ y $z = 4 \operatorname{sen}(\theta/2)$.

3.58. Encuentre la torsión de la curva $x = \dfrac{2t+1}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$ y $z = t + 2$. Explique su respuesta.

3.59. Considere las ecuaciones de la recta tangente, normal principal y binormal a la curva en el espacio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el punto $t = t_0$. Demuestre que pueden escribirse, respectivamente, como $r = r_0 + t\mathbf{T}_0$, $r = r_0 + t\mathbf{N}_0$ y $r = r_0 + t\mathbf{B}_0$, donde t es un parámetro.

3.60. Considere la curva $x = 3\cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$ y $z = 4t$. Encuentre ecuaciones para la *a*) tangente, *b*) normal principal, y *c*) binormal, en el punto en que $t = \pi$.

3.61. Encuentre ecuaciones para: *a*) el plano basculante, *b*) el plano normal, y *c*) el plano rectificador a la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$ y $z = 3t + t^3$ en el punto en que $t = 1$.

3.62. *a*) Demuestre que la diferencial de la longitud de arco sobre la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ está dada por

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

donde $E = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2$, $F = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $G = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2$.

b) Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que el sistema de coordenadas curvilíneas u, v, sea ortogonal es que $F \equiv 0$.

3.63. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = xy$ en el punto (2, 3, 6).

3.64. Halle ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $4z = x^2 - y^2$ en el punto (3, 1, 2).

3.65. Si se acepta que E, F y G están definidos como en el problema 3.62, pruebe que una normal unitaria a la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ es

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Mecánica

3.66. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r} = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j} + (8t^2 - 3t^3)\mathbf{k}$. Calcule las magnitudes de las componentes tangencial y normal de su aceleración cuando $t = 2$.

3.67. Suponga que una partícula tiene velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$, a lo largo de una curva espacial C. Demuestre que el radio de curvatura ρ de su trayectoria está dada numéricamente por $\rho = \dfrac{\mathbf{v}^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$.

3.68. Un objeto es atraído hacia un punto fijo O con una fuerza $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, llamada *fuerza central*, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del objeto en relación con O. Demuestre que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ donde $\mathbf{h}$ es un vector constante. Pruebe que el momento angular es constante.

3.69. Demuestre que el vector de aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio siempre se ubica en el plano basculante.

3.70. *a*) Calcule la aceleración de una partícula que se mueve en el plano xy en términos de las coordenadas polares (ρ, ϕ).

b) ¿Cuáles son las componentes de las aceleraciones paralela y perpendicular a ρ?

3.71. Determine *a*) la velocidad y *b*) la aceleración, de una partícula que se mueve según la miran los dos observadores descritos en el problema 3.30.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.31. *a*) $-\mathbf{i} - \mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, *c*) $\sqrt{2}$, *d*) $\sqrt{5}$

3.32. $\mathbf{v} = 6\cos 3t\mathbf{i} - 6\,\text{sen}\,3t\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = -18\,\text{sen}\,3t\mathbf{i} - 18\cos 3t\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}| = 10$, $|\mathbf{a}| = 18$

3.33. $\dfrac{-a\omega\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}$

3.35. $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

3.34. *a*) -6, *b*) $7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, *c*) 1, *d*) $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

3.37. $-30\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$

3.38. $\mathbf{A} = (t^3 - t + 2)\mathbf{i} + (1 - 2t^4)\mathbf{j} + (t - 4\,\text{sen}\,t)\mathbf{k}$

3.41. *a*) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 e^{5t} + \mathbf{C}_2 e^{-t}$, *b*) $\mathbf{r} = e^{-t}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$ y *c*) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1\cos 2t + \mathbf{C}_2\,\text{sen}\,2t$

3.42. $\mathbf{X} = \mathbf{C}_1\cos t + \mathbf{C}_2\,\text{sen}\,t$, $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_1\,\text{sen}\,t - \mathbf{C}_2\cos t$

3.43. $\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} = -y\,\text{sen}\,xy\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\quad \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} = -x\,\text{sen}\,xy\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,

$\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} = -y^2\cos xy\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\quad \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} = -x^2\cos xy\mathbf{i}$, $\quad \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x} = -(xy\cos xy + \text{sen}\,xy)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

3.44. $-4\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

3.47. *a*) $\mathbf{T} = \dfrac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1 + t^2)}$ $\quad$ *c*) $\mathbf{N} = -\dfrac{2t}{1 + t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{j}$

b) $\kappa = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2}$ $\quad$ *d*) $\mathbf{B} = \dfrac{(t^2 - 1)\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}}{\sqrt{2}(1 + t^2)}$ $\quad$ *e*) $\tau = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2}$

3.48. *a*) $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{i} + \sqrt{2}s\mathbf{j} + s^2\mathbf{k}}{s^2 + 1}$ $\quad$ *d*) $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2 + 1}$

b) $\mathbf{N} = \dfrac{-\sqrt{2}s\mathbf{i} + (1 - s^2)\mathbf{j} + \sqrt{2}s\mathbf{k}}{s^2 + 1}$ $\quad$ *e*) $\tau = \dfrac{\sqrt{2}}{s^2 + 1}$ $\quad$ *g*) $\sigma = \dfrac{s^2 + 1}{\sqrt{2}}$

c) $\mathbf{B} = \dfrac{s^2\mathbf{i} - \sqrt{2}s\mathbf{j} + \mathbf{k}}{s^2 + 1}$ $\quad$ *f*) $\rho = \dfrac{s^2 + 1}{\sqrt{2}}$

3.49. $\kappa = \dfrac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}$, $\quad \tau = \dfrac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$

3.52. $\kappa = \dfrac{ab}{(a^2\,\text{sen}^2\,u + b^2\cos^2 u)^{3/2}} = \dfrac{1}{\rho}$; si $a = b$, la curva dada, que es una elipse, se convierte en un círculo de radio a con radio de curvatura $\rho = a$.

3.53. $\omega = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$

3.57. $\kappa = \frac{1}{8}\sqrt{6 - 2\cos\theta}$, $\tau = \dfrac{(3 + \cos\theta)\cos\theta/2 + 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta/2}{12\cos\theta - 4}$

3.58. $\tau = 0$. La curva está en el plano $x - 3y + 3z = 5$.

3.60. *a*) Tangente: $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{k} + t\left(-\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}\right)$ o bien: $x = -3$, $y = -\frac{3}{5}t$ y $z = 4\pi + \frac{4}{5}t$.

b) Normal: $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t\mathbf{i}$ o bien: $x = -3 + t$, $y = 4\pi$ y $z = 0$.

c) Binormal: $\mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t\left(\frac{4}{5}\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}\right)$ o bien: $x = -3$, $y = 4\pi + \frac{4}{5}t$ y $z = \frac{3}{5}t$.

3.61. *a*) $y - z + 1 = 0$, *b*) $y + z - 7 = 0$ y *c*) $x = 2$.

3.63. $3x + 2y - z = 6$.

3.64. $3x - y - 2z = 4$; $x = 3t + 3$ y $y = 1 - t$, $z = 2 - 2t$.

3.66. Tangencial, 16; normal $2\sqrt{73}$.

3.70. *a*) $\ddot{\mathbf{r}} = [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\cos\phi - (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\text{ sen }\phi]\mathbf{i} + [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\text{ sen }\phi + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\cos\phi]\mathbf{j}$

b) $\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$, $\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$

3.71. *a*) $\mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, *b*) $\mathbf{a}_{p|f} = \mathbf{a}_{p|m} + \mathbf{a}_{m|f}$. En muchos casos $\boldsymbol{\omega}$ es una constante, entonces la rotación ocurre con velocidad angular constante. Por tanto, $\mathbf{D}_m\ \boldsymbol{\omega} = 0$, y

$$\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{D}_m\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

La cantidad $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_m$ se llama *aceleración de Coriolis*, y $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ se denomina *aceleración centrípeta*.

CAPÍTULO 4

Gradiente, divergencia y rotacional

4.1 INTRODUCCIÓN

A continuación se define el operador vectorial diferencial *del*, cuyo símbolo es ∇:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Este operador vectorial posee propiedades análogas a las de los vectores comunes. Es útil para definir tres cantidades que aparecen en ciertas aplicaciones y que se conocen como *gradiente*, *divergencia* y *rotacional*. El operador ∇ también se conoce como *nabla*.

4.2 GRADIENTE

Sea $\phi(x, y, z)$ una función escalar definida y diferenciable en cada punto (x, y, z) en cierta región del espacio [es decir, ϕ define un campo escalar diferenciable]. Entonces, el gradiente de ϕ, que se denota con $\nabla\phi$ o grad ϕ, se define como sigue:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Observe que $\nabla\phi$ define un campo vectorial.

EJEMPLO 4.1 Suponga que $\phi(x, y, z) = 3xy^3 - y^2z^2$. Encuentre $\nabla\phi$ (o grad ϕ) en el punto $P(1, 1, 2)$.

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(3xy^3 - y^2z^2) \\ &= 3y^3\mathbf{i} + (9xy^2 - 2yz^2)\mathbf{j} - 2y^2z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Entonces, $\nabla\phi(1, 1, 2) = 3(1)^3\mathbf{i} + [9(1)(1)^2 - 2(1)(2)^2]\mathbf{j} - 2(1)^2(2)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Derivadas direccionales

Considere una función escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. Entonces, la derivada direccional de ϕ en dirección de un vector $\mathbf{A}$ se denota con $D_A(\phi)$. Si $\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$, el vector unitario en dirección de $\mathbf{A}$,

$$D_A(\phi) = \nabla\phi \cdot \mathbf{a}$$

Se hace énfasis en que $\mathbf{a}$ debe ser un vector unitario.

EJEMPLO 4.2 Considere la función escalar $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$.

a) Encuentre grad ϕ. *b*) Encuentre grad ϕ en el punto $P = P(2, -1, 3)$. *c*) Determine la derivada direccional de ϕ en el punto P en dirección de $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) $\text{grad}\ \phi = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(x^2 + y^2 + xz) = (2x + z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

b) En $P(2, -1, 3)$, grad $\phi = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

c) Primero encontramos el vector unitario $\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}| = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}$ en dirección de $\mathbf{A}$. Después obtenemos la derivada direccional de ϕ en el punto $P(2, -1, 3)$ en dirección de $\mathbf{A}$, como sigue:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{a} = (7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left[(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{6}\right] = 6/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6.$$

Multiplicador de Lagrange

Aquí deseamos encontrar los puntos (x, y) que son los extremos (valores máximo o mínimo) de una función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = d$, donde d es una constante [más en general, se trata de encontrar los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que dan los extremos (valores máximo o mínimo) de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeta a la restricción $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d$, donde d es una constante].

Esto ocurrirá sólo cuando los gradientes ∇f y ∇g (derivadas direccionales) sean ortogonales a la curva [superficie] dada $g(x, y) = d$. Entonces, ∇f y ∇g son paralelos y, por tanto, debe haber una constante λ tal que $\nabla f = \lambda\nabla g$.

La letra griega λ (lambda) se usa para denotar al *multiplicador de Lagrange*. La condición $\nabla f = \lambda\nabla g$ y la restricción original generan $(n + 1)$ ecuaciones, en este caso tres, con las incógnitas x, y y λ:

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \quad \text{y} \quad g(x, y) = d$$

Las soluciones del sistema para x y y producen los candidatos para los extremos $f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = d$.

EJEMPLO 4.3 Minimice la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 2x + y = 9$.

Con el uso de la condición $\nabla f = \lambda\nabla g$ y la restricción dada, obtenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$2x = 2\lambda, \qquad 4y = \lambda \qquad \text{y} \qquad 2x + y = 9$$

Al eliminar λ de las dos primeras ecuaciones obtenemos $x = 4y$, que con $2x + y = 9$ produce $9y = 9$. De este modo obtenemos la solución $y = 1$ y $x = 4$. Entonces, $f(4, 1) = 16 + 2 = 18$ es el valor mínimo de f sujeto a la restricción $2x + y = 9$.

4.3 DIVERGENCIA

Suponga que $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ está definida y es diferenciable en cada punto (x, y, z) en una región del espacio (es decir, $\mathbf{V}$ define un campo vectorial diferenciable). Entonces, la *divergencia* de $\mathbf{V}$, que se denota con $\nabla \cdot \mathbf{V}$ o div $\mathbf{V}$, se define como sigue:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\end{aligned}$$

Aun cuando $\mathbf{V}$ es un vector, $\nabla \cdot \mathbf{V}$ es un escalar.

EJEMPLO 4.4 Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$. Encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (o div $\mathbf{A}$) en el punto $P(1, -1, 1)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) = 2xz^2 - 4yz^2 + xy^2$$

En el punto $P(1, -1, 1)$,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(1)(1)^2 - 4(-1)(1)^2 + (1)(-1)^2 = 7$$

4.4 ROTACIONAL

Suponga que $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial diferenciable. Entonces, el *rotacional* o *rotación* de $\mathbf{V}$, que se denota $\nabla \times \mathbf{V}$, rotacional $\mathbf{V}$ o rot $\mathbf{V}$, se define como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Observe que en la expansión del determinante, los operadores $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ deben *preceder* a V_1, V_2 y V_3.

EJEMPLO 4.5 Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$. Encuentre $\nabla \times \mathbf{A}$ (o rot $\mathbf{A}$) en el punto $P(1, -1, 1)$.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times (x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z^2 & -2y^2z^2 & xy^2z \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y^2z^2)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= (2xyz + 4y^2z)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

En el punto $P(1, -1, 1)$, $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

4.5 FÓRMULAS QUE INVOLUCRAN A ∇

Las proposiciones siguientes dan muchas de las propiedades del operador ∇.

PROPOSICIÓN 4.1: Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones vectoriales diferenciables, y que ϕ y ψ son funciones escalares diferenciables de posición (x, y, z). Entonces, se cumplen las leyes siguientes:

i) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ o bien grad$(\phi + \psi)$ = grad ϕ + grad ψ
ii) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ o bien div$(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ = div$\mathbf{A}$ + div$\mathbf{B}$

iii) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ o bien $\operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}$
iv) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
v) $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$
vi) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
vii) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
viii) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

PROPOSICIÓN 4.2: Suponga que ϕ y $\mathbf{A}$ son respectivamente funciones escalar y vectorial, diferenciables, y que ambas tienen segundas derivadas parciales continuas. Entonces, se cumplen las siguientes leyes:

i) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

donde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se llama *operador laplaciano*.

ii) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$. El rotacional del gradiente de ϕ es igual a cero.
iii) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. La divergencia del rotacional de $\mathbf{A}$ es igual a cero.
iv) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

4.6 INVARIANCIA

Considere dos sistemas de coordenadas rectangulares o marcos de referencia xyz y $x'y'z'$, que tengan el mismo origen O pero con ejes rotados con respecto al otro (vea la figura 4-1).

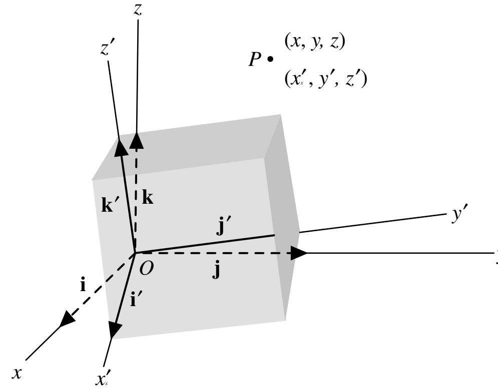


Figura 4-1

Un punto P en el espacio tiene coordenadas (x, y, z) o (x', y', z') relativas a estos sistemas coordenados. Las ecuaciones de transformación entre coordenadas de los dos sistemas, o *transformación de coordenadas*, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\
y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\
z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z
\end{aligned} \tag{1}
$$

Aquí, l_{jk}, $j, k = 1, 2, 3$ representan los cosenos directores de los ejes x', y' y z' con respecto de los ejes x, y y z (vea el problema 4.38). En el caso en que los orígenes de los dos sistemas coordenados no coincidan, las ecuaciones de

transformación se convierten en las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3 \end{aligned} \quad (2)$$

donde el origen O del sistema de coordenadas xyz se localiza en (a'_1, a'_2, a'_3) en relación con el sistema coordenado $x'y'z'$.

Las ecuaciones de transformación (1) definen una *rotación pura*, mientras que las ecuaciones (2) definen una *rotación con traslación*. Cualquier movimiento de cuerpo rígido tiene el efecto de una traslación seguida de una rotación. La transformación (1) también se denomina *transformación ortogonal*. Una transformación lineal general se llama *transformación afín*.

Físicamente, una función escalar puntual o campo escalar $\phi(x, y, z)$ evaluada en un punto particular, debe ser independiente de las coordenadas del punto. Así, la temperatura en cierto punto no depende de si se utilizan coordenadas (x, y, z) o (x', y', z'). Entonces, si $\phi(x, y, z)$ es la temperatura en el punto P con coordenadas (x, y, z) y $\phi'(x', y', z')$ es la temperatura en el mismo punto P con coordenadas (x', y', z'), debe ocurrir que $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$. Si $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$, donde x, y, z y x', y', z' están relacionadas por las ecuaciones de transformación (1) o (2), se llama a $\phi(x, y, z)$ un *invariante* con respecto de la transformación. Por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2$ es invariante con la transformación de rotación (1), ya que $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

En forma similar, una función vectorial puntual o campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ se llama *invariante* si $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}'(x', y', z')$. Esto se cumple si

$$A_1(x, y, z)\mathbf{i} + A_2(x, y, z)\mathbf{j} + A_3(x, y, z)\mathbf{k} = A'_1(x', y', z')\mathbf{i}' + \mathbf{A}'_2(x', y', z')\mathbf{j}' + A'_3(x', y', z')\mathbf{k}'$$

En los capítulos 7 y 8 se consideran transformaciones más generales y se amplían los conceptos anteriores.

Es posible demostrar (vea el problema 4.41) que el gradiente de un campo escalar invariante es un campo vectorial invariante con respecto de las transformaciones (1) o (2). De manera similar, la divergencia y el rotacional de un campo vectorial invariante son invariantes con dichas transformaciones.

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. Suponga que $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^2z^2$. Encuentre $\nabla\phi$ (o grad ϕ) en el punto $(1, -2, -1)$.

Solución

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(3x^2y - y^3z^2) \\ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2) \\ &= 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} - 2y^3z\mathbf{k} \\ &= 6(1)(-2)\mathbf{i} + \{3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2\}\mathbf{j} - 2(-2)^3(-1)\mathbf{k} \\ &= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \end{aligned}$$

4.2. Suponga que F y G son funciones escalares diferenciables de x, y y z. Demuestre que *a*) $\nabla(F + G) = \nabla F + \nabla G$ y *b*) $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$.

Solución

a)

$$\begin{aligned}\nabla(F+G) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(F+G)\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(F+G)\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y}+\mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}+\mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z}\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}+\mathbf{i}\frac{\partial G}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial G}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial z}\\ &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)F+\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)G=\nabla F+\nabla G\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\nabla(FG) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(FG)=\frac{\partial}{\partial x}(FG)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(FG)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}(FG)\mathbf{k}\\ &= \left(F\frac{\partial G}{\partial x}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathbf{k}\\ &= F\left(\frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\mathbf{k}\right)+G\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right)=F\nabla G+G\nabla F\end{aligned}$$

4.3. Encuentre $\nabla\phi$ si *a*) $\phi = \ln|\mathbf{r}|$, *b*) $\phi = \dfrac{1}{r}$.

Solución

a) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $\phi = \ln|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$.

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{1}{2}\nabla\ln(x^2+y^2+z^2)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2+z^2)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}+\mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+\mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\mathbf{r}}{r^2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\nabla\{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\}\\ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\\ &= \mathbf{i}\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x\right\}+\mathbf{j}\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y\right\}+\mathbf{k}\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z\right\}\\ &= \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

4.4. Demuestre que $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Solución

$$\nabla r^n = \nabla\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}\}$$

$$= \mathbf{i}\left\{\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\,2x\right\} + \mathbf{j}\left\{\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\,2y\right\} + \mathbf{k}\left\{\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\,2z\right\}$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = n(r^2)^{n/2-1}\mathbf{r} = nr^{n-2}\mathbf{r}$$

Observe que si $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r}_1$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, entonces $\nabla r^n = nr^{n-1}\,\mathbf{r}_1$.

4.5. Demuestre que $\nabla\phi$ es un vector perpendicular a la superficie $\phi(x, y, z) = c$, donde c es una constante.

Solución

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición para cualquier punto $P(x, y, z)$ sobre la superficie. Entonces, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ está en el plano tangente a la superficie en P.

Pero $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$ o bien $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = 0$, es decir: $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = 0$, por lo que $\nabla\phi$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$ y por tanto también a la superficie.

4.6. Encuentre una normal unitaria a la superficie $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ en el punto $P(1, 1, 1)$.

Solución

Sea $\phi = -x^2yz^2 + 2xy^2z$. Según el problema 4.5, $\nabla\phi(1, 1, 1)$ es normal a la superficie $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ en el punto $P(1, 1, 1)$; entonces, $\frac{\nabla\phi(1, 1, 1)}{|\nabla\phi(1, 1, 1)|}$ bastará.

$$\nabla\phi = (-2xyz^2)\mathbf{i} + (-x^2z^2 + 4xyz)\mathbf{j} + (-2x^2yz + 2xy^2)\mathbf{k}.$$

Entonces, $\nabla\phi(1, 1, 1) = 3\mathbf{j}$. $|\nabla\phi(1, 1, 1)| = |3\mathbf{j}| = 3|\mathbf{j}| = 3$. Así, en el punto $P(1, 1, 1)\ \frac{3\mathbf{j}}{3} = \mathbf{j}$ es una normal unitaria a $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$.

4.7. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie $x^2yz - 4xyz^2 = -6$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

Solución

$$\nabla(x^2yz - 4xyz^2) = (2xyz - 4yz^2)\mathbf{i} + (x^2z - 4xz^2)\mathbf{j} + (x^2y - 8xyz)\mathbf{k}.$$

Al evaluar el gradiente en el punto $P(1, 2, 1)$ obtenemos $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$. Entonces, $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$ es normal a la superficie en P. Una ecuación del plano con normal $\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ tiene la forma

$$ax + by + cz = \mathbf{k}$$

Por lo que la ecuación tiene la forma $4x + 3y + 14z = \mathbf{k}$. Al sustituir P en la ecuación obtenemos $\mathbf{k} = 24$. Entonces, la ecuación requerida es $4x + 3y + 14z = 24$.

4.8. Sean $\phi(x, y, z)$ y $\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ las temperaturas en dos puntos vecinos $P(x, y, z)$ y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ de cierta región.

a) Interprete físicamente la cantidad $\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - \phi(x,\ y,\ z)}{\Delta s}$, donde Δs es la distancia entre los puntos P y Q.

b) Evalúe $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ y haga la interpretación física.

c) Demuestre que $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$.

Solución

a) Como $\Delta\phi$ es el cambio de la temperatura entre los puntos P y Q, y Δs es la distancia entre dichos puntos, $\Delta\phi/\Delta s$ representa la tasa promedio de cambio de la temperatura por unidad de distancia en la dirección de P a Q.

b) Del cálculo obtenemos:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \text{ infinitésimos de orden mayor que } \Delta x, \Delta y \text{ y } \Delta z.$$

Entonces,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

o bien

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Donde $\frac{d\phi}{ds}$ representa la tasa de cambio de la temperatura respecto de la distancia al punto P en la dirección hacia Q. Ésta también se denomina la *derivada direccional* de ϕ.

c) $$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Observe que como $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ es un vector unitario, $\nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ es la componente de $\nabla\phi$ en la dirección de este vector unitario.

4.9. Demuestre que la mayor tasa de cambio de ϕ, es decir: la máxima derivada direccional, tiene lugar en la dirección del vector $\nabla\phi$ y también tiene su magnitud.

Solución

Según el problema 4.8*c*), $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ es la proyección de $\nabla\phi$ en la dirección de $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Esta proyección será un máximo cuando $\nabla\phi$ y $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ tengan la misma dirección. Entonces, el valor máximo de $\frac{d\phi}{ds}$ tiene lugar en la dirección de $\nabla\phi$ y su magnitud es $|\nabla\phi|$.

4.10. Sea $\phi = x^2yz - 4xyz^2$. Encuentre la derivada direccional de ϕ en $P(1, 3, 1)$ en la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Solución

En primer lugar se encuentra $\nabla\phi = (2xyz - 4yz^2)\mathbf{i} + (x^2z - 4xz^2)\mathbf{j} + (x^2y - 8xyz)\mathbf{k}$. Entonces, $\nabla\phi(1, 3, 1) = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$. El vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Así, la derivada direccional requerida es

$$\nabla\phi(1, 3, 1) \cdot \mathbf{a} = (-6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 21\mathbf{k}) \cdot (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) = -4 + 1 + 14 = 11.$$

4.11. Sea $\phi = x^2y^3z^6$. *a*) ¿En qué dirección a partir del punto $P(1, 1, 1)$ la derivada direccional de ϕ es un máximo? *b*) ¿Cuál es la magnitud de este máximo?

Solución

$\nabla\phi = \nabla(x^2y^3z^6) = 2xy^3z^6\mathbf{i} + 3x^2y^2z^6\mathbf{j} + 6x^2y^3z^5\mathbf{k}$. Entonces, $\nabla\phi(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Así, según el problema 4.9:

a) La derivada direccional es un máximo en la dirección de $\nabla\phi(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

b) La magnitud de este máximo es $|\nabla\phi(1, 1, 1)| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2} = 7$.

4.12. Encuentre el ángulo entre las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$ en el punto $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right)$.

Solución

El ángulo entre las superficies en el punto es el ángulo entre las normales a las superficies en éste. Sean $\phi_1 = x^2 + y^2 - z$ y $\phi_2 = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - z$.

Una normal a $z = x^2 + y^2$ es

$$\nabla\phi_1 = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla\phi_1(P) = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Una normal a $z = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$ es

$$\nabla\phi_2 = 2\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2\mathbf{i} + 2\left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla\phi_2(P) = -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Ahora, $(\nabla\phi_1(P)) \cdot (\nabla\phi_2(P)) = |\nabla\phi_1(P)||\nabla\phi_2(P)| \cos\theta$, donde θ es el ángulo requerido.

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) = \left|\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right| \left|-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right| \cos\theta$$

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1}\cos\theta \ \text{ y } \ \cos\theta = \frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el ángulo agudo es $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$.

4.13. Sea R la distancia desde un punto fijo $A(a, b, c)$ a cualquier punto $P(x, y, z)$. Demuestre que ∇R es un vector unitario en la dirección $\mathbf{AP} = \mathbf{R}$.

Solución

Si $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_P$ son los vectores de posición $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de A y P, respectivamente, entonces $\mathbf{R} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}$, de modo que $R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Entonces,

$$\nabla R = \nabla\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right) = \frac{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

es un vector unitario en la dirección $\mathbf{R}$.

4.14. Sea P cualquier punto sobre una elipse cuyos focos son los puntos A y B, como se ilustra en la figura 4-2. Demuestre que las rectas AP y BP forman ángulos iguales con la tangente a la elipse en P.

Solución

Sean $\mathbf{R}_1 = \mathbf{AP}$ y $\mathbf{R}_2 = \mathbf{BP}$ vectores trazados a partir de los focos A y B, respectivamente, hacia el punto P de la elipse, y sea $\mathbf{T}$ una tangente unitaria a la elipse en P.

Como una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P, la suma de cuyas distancias desde dos puntos fijos A y B es una constante p, se observa que la ecuación de la elipse es $R_1 + R_2 = p$.

De acuerdo con el problema 4.5, $\nabla(R_1 + R_2)$ es una normal a la elipse, por lo que $[\nabla(R_1 + R_2)] \cdot \mathbf{T} = 0$ o bien $(\nabla R_2) \cdot \mathbf{T} = -(\nabla R_1) \cdot \mathbf{T}$.

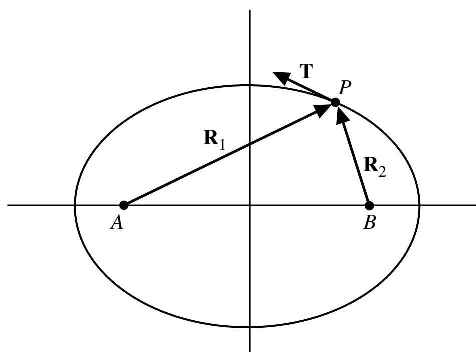


Figura 4-2

Como ∇R_1 y ∇R_2 son vectores unitarios en dirección de $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, respectivamente (vea el problema 4.13), el coseno del ángulo entre ∇R_2 y $\mathbf{T}$ es igual al coseno del ángulo entre ∇R_1 y $-\mathbf{T}$; por lo que, los ángulos también son iguales.

El problema tiene una interpretación física. Los rayos de luz (o las ondas sonoras) que se originen en el foco A, por ejemplo, se reflejarán de la elipse al foco B.

Divergencia

4.15. Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$. Encuentre $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (o div $\mathbf{A}$) en el punto $P(1, -1, 1)$.

Solución

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) = 2xz^2 - 4yz^2 + xy^2$$
$$\nabla\cdot\mathbf{A}(1, -1, 1) = 2(1)(1)^2 - 4(-1)(1)^2 + (1)(-1)^2 = 7$$

4.16. Dada $\phi = 6x^3y^2z$. *a*) Encuentre $\nabla \cdot \nabla\phi$(o div grad ϕ).

b) Demuestre que $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$, donde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ denota el operador laplaciano.

Solución

a) $\nabla\phi = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x^3y^2z)\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(6x^3y^2z)\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}(6x^3y^2z)\mathbf{k} = 18x^2y^2z\mathbf{i} + 12x^3yz\mathbf{j} + 6x^3y^2\mathbf{k}$.

Entonces
$$\nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(18x^2y^2z\mathbf{i} + 12x^3yz\mathbf{j} + 6x^3y^2\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(18x^2y^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(12x^3yz) + \frac{\partial}{\partial z}(6x^3y^2) = 36xy^2z + 12x^3z.$$

b)
$$\nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \nabla^2\phi$$

4.17. Demuestre que $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$

Solución

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

De manera similar,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Entonces, por adición,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0.$$

La ecuación $\nabla^2\phi = 0$ se llama *ecuación de Laplace*. Se concluye que $\phi = 1/r$ es una solución de dicha ecuación.

4.18. Demuestre que *a*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$, *b*) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

Solución

a) Sean $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$.
Entonces

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot[(A_1+B_1)\mathbf{i}+(A_2+B_2)\mathbf{j}+(A_3+B_3)\mathbf{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_1+B_1)+\frac{\partial}{\partial y}(A_2+B_2)+\frac{\partial}{\partial z}(A_3+B_3)$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}+\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})$$

$$= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$

b) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \nabla\cdot(\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \phi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

4.19. Demuestre que $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$.

Solución

Sea $\phi = r^{-3}$ y $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ en el resultado del problema 4.18*b*).
Entonces, $\nabla \cdot (r^{-3}\mathbf{r}) = (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + (r^{-3})\nabla \cdot \mathbf{r}$

$$= -3r^{-5}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = 0, \quad \text{con el uso del problema 4.4.}$$

4.20. Demuestre que $\nabla \cdot (U\nabla V - V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U$.

Solución

Del problema 4.18*b*), con $\phi = U$ y $\mathbf{A} = \nabla V$,

$$\nabla \cdot (U\nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U(\nabla \cdot \nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U\nabla^2 V$$

Al intercambiar U y V obtenemos

$$\nabla \cdot (V\nabla U) = (\nabla V) \cdot (\nabla U) + V\nabla^2 U.$$

Y al restar,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (U\nabla V) - \nabla \cdot (V\nabla U) &= \nabla \cdot (U\nabla V - V\nabla U) \\ &= (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U\nabla^2 V - [(\nabla V) \cdot (\nabla U) + V\nabla^2 U] \\ &= U\nabla^2 V - V\nabla^2 U \end{aligned}$$

4.21. Un fluido se mueve de modo que su velocidad en cualquier punto es $\mathbf{v}(x, y, z)$. Demuestre que la pérdida de fluido por unidad de volumen por unidad de tiempo en un pequeño paralelepípedo con centro en $P(x, y, z)$ y aristas paralelas a los ejes coordenados y con magnitudes Δx, Δy y Δz, respectivamente, está dada aproximadamente por div $\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$.

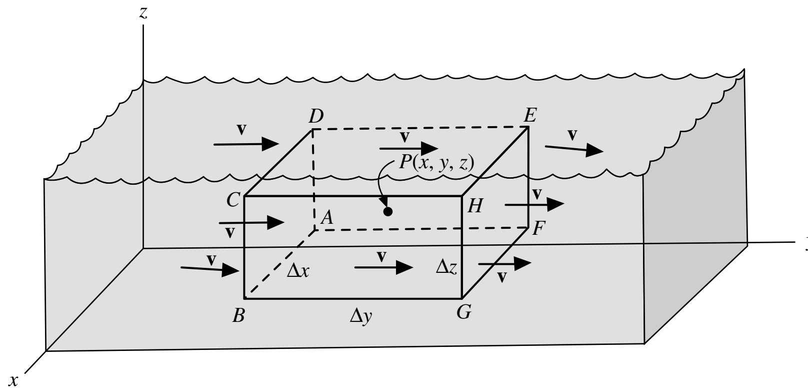


Figura 4-3

Solución

En relación con la figura 4-3, tenemos lo siguiente:

$$\text{componente } x \text{ de la velocidad } \mathbf{v} \text{ en } P = v_1$$

$$\text{componente } x \text{ de } \mathbf{v} \text{ en el centro de la cara } AFED = v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x, \text{ aproximadamente,}$$

$$\text{componente } x \text{ de } \mathbf{v} \text{ en el centro de la cara } GHCB = v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x, \text{ aproximadamente.}$$

Entonces: (1) volumen de fluido que cruza la cara *AFED* por unidad de tiempo $= \left(v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z,$

(2) volumen de fluido que atraviesa la cara *GHCB* por unidad de tiempo $= \left(v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z.$

Pérdida de volumen por unidad de tiempo en la dirección $x = (2) - (1) = \frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z.$

De manera similar, la pérdida de volumen por unidad de tiempo en la dirección $y = \frac{\partial v_2}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$

pérdida de volumen por unidad de tiempo en la dirección $z = \frac{\partial v_3}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z.$

Entonces, la pérdida total de volumen por unidad de volumen por unidad de tiempo es:

$$= \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Esto se cumple con exactitud sólo en el límite, conforme el paralelepípedo se contrae a P, es decir cuando Δx, Δy y Δz tienden a cero. Si en ninguna parte hay pérdida de fluido, entonces $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ésta se denomina *ecuación de continuidad* para un fluido incompresible. Como el fluido no se crea ni se destruye en ningún punto, se dice que no tiene fuentes ni sumideros. En ocasiones se llama *solenoidal* a un vector, como **v**, cuya divergencia sea igual a cero.

4.22. Determine la constante a de modo que el vector siguiente sea solenoidal.

$$\mathbf{V} = (-4x - 6y + 3z)\mathbf{i} + (-2x + y - 5z)\mathbf{j} + (5x + 6y + az)\mathbf{k}$$

Solución

Un vector **V** es *solenoidal* si su divergencia es igual a cero.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}(-4x - 6y + 3z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x + y - 5z) + \frac{\partial}{\partial z}(5x + 6y + az) = -4 + 1 + a = -3 + a.$$

Entonces, $\nabla \cdot \mathbf{V} = -3 + a = 0$, cuando $a = 3$.

Rotacional

4.23. Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$. Encuentre $\nabla \times \mathbf{A}$ (o rot **A**) en el punto $P = (1, -1, 1)$.

Solución

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z^2 & -2y^2z^2 & xy^2z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y^2z^2)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2)\right]\mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2z^2)\right]\mathbf{k}$$

$$= (2xyz + 4yz^2)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j}$$

Entonces, $\nabla \times \mathbf{A}(P) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

4.24. Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$. Encuentre rot rot $\mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$.

Solución

Según el problema anterior, $\nabla \times \mathbf{A} = (2xyz + 4yz^2)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times [(2xyz + 4y^2z)\mathbf{i} - (y^2z - 2x^2z)\mathbf{j}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + 4y^2z & -y^2z + 2x^2z & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2z + 2x^2z)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz + 4y^2z)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2z + 2x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xyz + 4y^2z)\right]\mathbf{k} \\
&= (y^2 - 2x^2)\mathbf{i} + (2xy + 4y^2)\mathbf{j} + (2xz - 8yz)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

4.25. Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Demuestre que *a*) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ y *b*) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$.

Solución

a)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \times [(A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & A_3 + B_3 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_3 + B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2 + B_2)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_1 + B_1) - \frac{\partial}{\partial x}(A_3 + B_3)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_2 + B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1 + B_1)\right]\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right]\mathbf{k} \\
&\quad + \left[\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right]\mathbf{k} \\
&= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

b) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \nabla \times (\phi\mathbf{A}_1\mathbf{i} + \phi\mathbf{A}_2\,\mathbf{j} + \phi\mathbf{A}_3\mathbf{k})$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right]\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$= \left[\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right]\mathbf{i}$$

$$+ \left[\phi\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right]\mathbf{j} + \left[\phi\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right]\mathbf{k}$$

$$= \phi\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \phi(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi(\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla\phi)\times\mathbf{A}.$$

4.26. Suponga que $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Evalúe $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r})$.

Solución

Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + \mathbf{A}_3\mathbf{k}$, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (zA_2 - yA_3)\mathbf{i} + (xA_3 - zA_1)\mathbf{j} + (yA_1 - xA_2)\mathbf{k}$$

y

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z}(yA_1 - xA_2)$$

$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y\frac{\partial A_3}{\partial x} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

$$= x\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{r}\cdot\text{rot}\,\mathbf{A}.$$

Si $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$, lo anterior se reduce a cero.

4.27. Demuestre que *a*) $\nabla\times(\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (rot grad $\phi = \mathbf{0}$), *b*) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (div rot $\mathbf{A} = 0$).

Solución

a) $$\nabla\times(\nabla\phi) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

siempre que aceptemos que ϕ tiene segundas derivadas parciales continuas de modo que el orden de diferenciación carezca de importancia.

$$b)\quad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$= \nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}=0$$

con la suposición de que **A** tiene segundas derivadas parciales continuas.

Observe la similitud entre los resultados anteriores y el resultado $(\mathbf{C}\times\mathbf{C}m) = (\mathbf{C}\times\mathbf{C})m = \mathbf{0}$, donde m es un escalar y $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

4.28. Encuentre rot $(\mathbf{r}f(r))$, donde $f(r)$ es diferenciable.

Solución

$$\text{rot}(\mathbf{r}f(r)) = \nabla\times(\mathbf{r}f(r))$$
$$= \nabla\times(xf(r)\mathbf{i}+yf(r)\mathbf{j}+zf(r)\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xf(r) & yf(r) & zf(r)\end{vmatrix}$$
$$= \left(z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Pero $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\dfrac{f'(r)x}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}}=\dfrac{f'x}{r}$.

En forma similar, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{f'y}{r}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{f'z}{r}$.

Entonces, el resultado es $=\left(z\dfrac{f'y}{r}-y\dfrac{f'z}{r}\right)\mathbf{i}+\left(x\dfrac{f'z}{r}-z\dfrac{f'x}{r}\right)\mathbf{j}+\left(y\dfrac{f'x}{r}-x\dfrac{f'y}{r}\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

4.29. Demuestre que $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$.

Solución

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$= \nabla\times\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_3}{\partial y}-\dfrac{\partial A_2}{\partial z} & \dfrac{\partial A_1}{\partial z}-\dfrac{\partial A_3}{\partial x} & \dfrac{\partial A_2}{\partial x}-\dfrac{\partial A_1}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right]\mathbf{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right]\mathbf{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$=\left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\right)\mathbf{j}+\left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}\right)\mathbf{k}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$=\left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}+\left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$

$$=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})$$

$$+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$=-\nabla^2\mathbf{A}+\nabla\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)=-\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

Si se desea, en éstos y otros resultados puede abreviarse el trabajo de la escritura si sólo se anotan las componentes **i**, ya que las otras pueden obtenerse por simetría.

El resultado también se puede establecer formalmente como sigue. Del problema 47*a*), del capítulo 2,

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1)$$

Se hace $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\nabla$ y $\mathbf{C}=\mathbf{F}$,

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{F}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F}$$

Observe que la fórmula (1) debe escribirse en forma tal que los operadores **A** y **B** precedan al operando **C**, de otro modo el formalismo no se puede aplicar.

4.30. Suponga que $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Demuestre que $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es un vector constante.

Solución

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}=\nabla\times(\omega\times\mathbf{r})=\nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\omega_1&\omega_2&\omega_3\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times[(\omega_2 z-\omega_3 y)\mathbf{i}+(\omega_3 x-\omega_1 z)\mathbf{j}+(\omega_1 y-\omega_2 x)\mathbf{k}]$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\\omega_2 z-\omega_3 y&\omega_3 x-\omega_1 z&\omega_1 y-\omega_2 x\end{vmatrix}=2(\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k})=2\boldsymbol{\omega}.$$

Entonces, $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

Este problema indica que el rotacional de un campo vectorial tiene que ver con las propiedades rotacionales del campo. Esto se confirmará en el capítulo 6. Por ejemplo, si el campo **F** corresponde a un fluido en movimiento, entonces una rueda con paletas colocada en distintos puntos del campo tenderá a rotar en aquellas regiones en las que $\mathbf{F}\neq\mathbf{0}$, mientras que si rot $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ en cierta región, no habría rotación y el campo **F** se denominaría *irrotacional*. Un campo que no sea irrotacional, en ocasiones recibe el nombre de *campo vórtice*.

4.31. Suponga que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Demuestre que **E** y **H** satisfacen $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Solución

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

De acuerdo con el problema 4.29, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$. Entonces, $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$.
En forma similar, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$.

Pero $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H}$. Entonces, $\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$.

Las ecuaciones dadas se relacionan con las *ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética*. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

se denomina *ecuación de onda*.

Problemas varios

4.32. Un vector **V** se llama *irrotacional* si rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. *a*) Encuentre constantes a, b y c, de modo que

$$\mathbf{V} = (-4x - 3y + az)\mathbf{i} + (bx + 3y + 5z)\mathbf{j} + (4x + cy + 3z)\mathbf{k}$$

sea irrotacional. *b*) Demuestre que **V** puede expresarse como el gradiente de una función escalar.

Solución

a) rot $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4x - 3y + az & bx + 3y + 5z & 4x + cy + 3z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b + 3y + 5z & 4x + cy + 3z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4x - 3y + az & 4x + cy + 3z \end{vmatrix}\mathbf{j}$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -4x - 3y + az & bx + 3y + 5z \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (c - 5)\mathbf{i} - (4 - a)\mathbf{j} + (b + 3)\mathbf{k}.$$

Esto es igual al vector cero cuando $a = 4$, $b = -3$ y $c = 5$. Por tanto,

$$\mathbf{V} = (-4x - 3y + 4z)\mathbf{i} + (-3x + 3y + 5z)\mathbf{j} + (4x + 5y + 3z)\mathbf{k}.$$

b) Suponga que $\mathbf{V} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}$. Entonces,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -4x - 3y + 4z \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -3x + 3y + 5z \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 4x + 5y + 3z \tag{3}$$

Al hacer la integral parcial de (1) con respecto de x mientras se mantiene a y y a z constantes, obtenemos lo siguiente:

$$\phi = -2x^2 - 3xy + 4xz + f(y, z) \tag{4}$$

donde $f(y, z)$ es una función arbitraria de y y de z. En forma similar obtenemos de (2) y (3):

$$\phi = -3xy + \frac{3}{2}y^2 + 5yz + g(x, z) \tag{5}$$

y

$$\phi = 4xz + 5yz + \frac{3}{2}z^2 + h(x, y). \tag{6}$$

La comparación de (4), (5) y (6) muestra que habrá un valor común de ϕ si se elige

$$f(y, z) = \frac{3}{2}y^2 + 5yz + \frac{3}{2}z^2, \quad g(x, z) = -2x^2 + 4xz + \frac{3}{2}z^2 \quad \text{y} \quad h(x, y) = -2x^2 - 3xy + \frac{3}{2}y^2$$

por lo que

$$\phi = -2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 - 3xy + 4xz + 5yz$$

Note que es posible sumar cualquier constante a ϕ. En general, si $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$, entonces podemos encontrar ϕ tal que $\mathbf{V} = \nabla\phi$.

Un campo vectorial $\mathbf{V}$, que se obtenga de un campo escalar ϕ de manera que $\mathbf{V} = \nabla\phi$, se llama *campo vectorial conservativo*, y ϕ se denomina *potencial escalar*. A la inversa, observe que si $\mathbf{V} = \nabla\phi$ entonces $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ (vea el problema 4.27*a*).

4.33. Demuestre que si $\phi(x, y, z)$ es cualquier solución de la ecuación de Laplace, entonces $\nabla\phi$ es un vector que es tanto solenoidal como irrotacional.

Solución

Por hipótesis, ϕ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = \mathbf{0}$, es decir, $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \mathbf{0}$. Entonces, $\nabla\phi$ es solenoidal (vea los problemas 4.21 y 4.22).

Del problema 4.27*a*), $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$, por lo que $\nabla\phi$ también es irrotacional.

4.34. Diga una posible definición de grad $\mathbf{B}$.

Solución

Suponga que $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Formalmente, definimos grad $\mathbf{B}$ como

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{ii} + \frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{ij} + \frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{ik} \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{ji} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{jj} + \frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{jk} \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{ki} + \frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{kj} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{kk}\end{aligned}$$

Las cantidades **ii**, **ij**, etc., se llaman *díadas unitarias* (observe que, por ejemplo, **ij**, no es lo mismo que **ji**). Una cantidad de la forma

$$a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\,\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}$$

se llama *diádica* y los coeficientes a_{11}, a_{12}, … son sus *componentes*. Un arreglo de estas nueve componentes en la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se llama *matriz* de 3 por 3. Una diádica es una generalización de un vector. Una mayor generalización conduce a las *triádicas*, que son cantidades que consisten en 27 términos de la forma $a^{111}\mathbf{iii} + a^{211}\mathbf{jii} + \ldots$. Un estudio de la forma en que las componentes de una diádica o triádica se transforman de un sistema de coordenadas a otro lleva al *análisis tensorial*, que se aborda en el capítulo 8.

4.35. Sea $\mathbf{A}$ un vector definido por $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, y una diádica $\mathbf{\Phi}$ por

$$\mathbf{\Phi} = a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}$$

Dé una posible definición de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi}$.

Solución

Formalmente, si se supone que se cumple la ley distributiva,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{\Phi} = A_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{\Phi} + A_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{\Phi} + A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Phi}$$

Por ejemplo, considere $\mathbf{i} \cdot \mathbf{\Phi}$. Este producto se forma haciendo el producto punto de $\mathbf{i}$ con cada término de $\mathbf{\Phi}$ y sumando los resultados. Ejemplos comunes son $\mathbf{i} \cdot a_{11}\mathbf{ii}$, $\mathbf{i} \cdot a_{12}\mathbf{ij}$, $\mathbf{i} \cdot a_{21}\mathbf{ji}$, $\mathbf{i} \cdot a_{32}\mathbf{kj}$, etc. Si se da significado a éstos del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \cdot a_{11}\mathbf{ii} &= a_{11}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} = a_{11}\mathbf{i}, \quad &&\text{ya que } \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1\\
\mathbf{i} \cdot a_{12}\mathbf{ij} &= a_{12}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{j} = a_{12}\mathbf{j}, &&\text{ya que } \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1\\
\mathbf{i} \cdot a_{21}\mathbf{ji} &= a_{21}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})\mathbf{i} = \mathbf{0}, &&\text{ya que } \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0\\
\mathbf{i} \cdot a_{32}\mathbf{kj} &= a_{32}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k})\mathbf{j} = \mathbf{0}, &&\text{ya que } \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0
\end{aligned}$$

y se da una interpretación análoga a los términos de $\mathbf{j} \cdot \mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Phi}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Phi} &= A_1(a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}) + A_2(a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}) + A_3(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k})\\
&= (A_1a_{11} + A_2a_{21} + A_3a_{31})\mathbf{i} + (A_1a_{12} + A_2a_{22} + A_3a_{32})\mathbf{j} + (A_1a_{13} + A_2a_{23} + A_3a_{33})\mathbf{k}
\end{aligned}$$

el cual es un vector.

4.36. *a*) Interprete el símbolo $\mathbf{A} \cdot \nabla$. *b*) Diga un posible significado de $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$. *c*) ¿Es posible escribir éste como $\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B}$, sin ambigüedad?

Solución

a) Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Entonces, formalmente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \nabla &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\\
&= A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

es un operador. Por ejemplo,

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi = \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = A_1\frac{\partial \phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial \phi}{\partial y} + A_3\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Note que esto es lo mismo que $\mathbf{A} \cdot \nabla\phi$.

b) Formalmente, con el uso del resultado del inciso *a*), con ϕ reemplazada por $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{B} = A_1\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_3\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\\
&= \left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\mathbf{j}\\
&\quad + \left(A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} + A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

c) Utilice la interpretación de $\nabla\mathbf{B}$ como en el problema 4.34. Entonces, de acuerdo con la simbología establecida en el problema 4.35,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot\nabla\mathbf{B} = A_1\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_2\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{B} + A_3\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{B}\\ &= A_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial x}\mathbf{k}\right)+A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial y}\mathbf{k}\right)+A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}\mathbf{i}+\frac{\partial B_2}{\partial z}\mathbf{j}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\mathbf{k}\right)\end{aligned}$$

lo que da el mismo resultado que el del inciso *b*). Se concluye que $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$, sin ambigüedad, siempre que se introduzca el concepto de diádica con las propiedades mencionadas.

4.37. Suponga que $\mathbf{A} = 2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ y $\phi = 2x^2yz^3$. Encuentre *a*) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$, *b*) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, *c*) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$, *d*) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$ y *e*) $\mathbf{A}\times\nabla\phi$.

Solución

a)
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi &= \left[(2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi\\ &= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x}-x^2y\frac{\partial}{\partial y}+xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^2yz^3)\\ &= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3)-x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3)+xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)\\ &= (2yz)(4xyz^3)-(x^2y)(2x^2z^3)+(xz^2)(6x^2yz^2)\\ &= 8xy^2z^4-2x^4yz^3+6x^3yz^4\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\nabla\phi &= (2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\\ &= (2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k})\cdot(4xyz^3\mathbf{i}+2x^2z^3\mathbf{j}+6x^2yz^2\mathbf{k})\\ &= 8xy^2z^4-2x^4yz^3+6x^3yz^4\end{aligned}$$

La comparación con el inciso *a*) ilustra el resultado $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi$.

c)
$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} &= \left[(x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}-xy\mathbf{k})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\mathbf{A}\\ &= \left(x^2\frac{\partial}{\partial x}+yz\frac{\partial}{\partial y}-xy\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} = x^2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+yz\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}-xy\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\\ &= x^2(-2xy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})+yz(2z\mathbf{i}-x^2\mathbf{j})-xy(2y\mathbf{i}+2xz\mathbf{k})\\ &= (2yz^2-2xy^2)\mathbf{i}+(2x^3y+x^2yz)\mathbf{j}+(x^2z^2-2x^2yz)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Para ver una comparación de este resultado con $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A}$, consulte el problema 4.36*c*).

d)
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\nabla)\phi &= \left[(2yz\mathbf{i}-x^2y\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k})\times\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]\phi\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2yz & -x^2y & xz^2\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\phi\\ &= \left[\mathbf{i}\left(-x^2y\frac{\partial}{\partial z}-xz^2\frac{\partial}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(xz^2\frac{\partial}{\partial x}-2yz\frac{\partial}{\partial z}\right)+\mathbf{k}\left(2yz\frac{\partial}{\partial y}+x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi\\ &= -\left(x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}+xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k}\\ &= -(6x^4y^2z^2+2x^3z^5)\mathbf{i}+(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3)\mathbf{j}+(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

e) $\mathbf{A} \times \nabla\phi = (2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \times \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

La comparación con el resultado del inciso *d*) ilustra el resultado $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi = \mathbf{A} \times \nabla\phi$.

Invariancia

4.38. Dos sistemas de coordenadas rectangulares xyz y $x'y'z'$ que tienen el mismo origen, se giran uno con respecto del otro. Obtenga las ecuaciones de transformación entre las coordenadas de un punto en los dos sistemas.

Solución

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ los vectores de posición de cualquier punto P en los dos sistemas (consulte la figura 4-1, en la página 72). Entonces, como $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$,

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1}$$

Ahora, para cualquier vector $\mathbf{A}$, tenemos lo siguiente (vea el problema 4.20 del capítulo 2),

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{A}\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{A}\mathbf{k}')\mathbf{k}'$$

Así, si se hace $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en sucesión,

$$\begin{cases} \mathbf{i} = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}' \end{cases} \tag{2}$$

Al sustituir las ecuaciones (2) en (1) e igualar los coeficientes de $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$, se encuentra que:

$$x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \quad y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \quad \text{y} \quad z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \tag{3}$$

que son las ecuaciones de transformación pedidas.

4.39. Demuestre que:

$$\mathbf{i}' = l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}' = l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}' = l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k}$$

Solución

Para cualquier vector $\mathbf{A}$ tenemos que $\mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$.
Entonces, si $\mathbf{A} = \mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$, en sucesión,

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{11}\mathbf{i} + l_{12}\mathbf{j} + l_{13}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}' = (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{21}\mathbf{i} + l_{22}\mathbf{j} + l_{23}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = l_{31}\mathbf{i} + l_{32}\mathbf{j} + l_{33}\mathbf{k}$$

4.40. Demuestre que $\sum_{p=1}^{3} l_{pm} l_{pn} = 1$, si $m = n$, y 0 si $m \neq n$, donde m y n pueden adoptar cualquiera de los valores 1, 2 o 3.

Solución

De la ecuación (2) del problema 4.38,

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}') = l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 \\
\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{12}\mathbf{i}' + l_{22}\mathbf{j}' + l_{32}\mathbf{k}') = l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} + l_{31}l_{32} \\
\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0 &= (l_{11}\mathbf{i}' + l_{21}\mathbf{j}' + l_{31}\mathbf{k}')\cdot(l_{13}\mathbf{i}' + l_{23}\mathbf{j}' + l_{33}\mathbf{k}') = l_{11}l_{13} + l_{21}l_{23} + l_{31}l_{33}
\end{aligned}$$

Esto establece el resultado requerido, donde $m = 1$. Si se considera $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$, el resultado puede demostrarse para $m = 2$ y $m = 3$.

Al escribir

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad \text{el resultado puede escribirse como } \sum_{p=1}^{3} l_{pm} l_{pn} = \delta_{mn}.$$

El símbolo δ_{mn} se llama *delta de Kronecker*.

4.41. Suponga que $\phi(x, y, z)$ es un invariante escalar con respecto a una rotación de ejes. Demuestre que grad ϕ es un invariante vectorial con dicha transformación.

Solución

Por hipótesis, $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$. Para establecer el resultado deseado, debe demostrarse que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\mathbf{i}' + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\mathbf{j}' + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\mathbf{k}'$$

Con el empleo de la regla de la cadena y las ecuaciones de transformación (3) del problema 4.38, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{11} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{21} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{31} \\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{12} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{22} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{32} \\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{\partial\phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial\phi'}{\partial x'}l_{13} + \frac{\partial\phi'}{\partial y'}l_{23} + \frac{\partial\phi'}{\partial z'}l_{33}
\end{aligned}$$

Al multiplicar estas ecuaciones por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente, y sumarlas, y con el uso del problema 4.39, se llega al resultado requerido.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.42. Suponga que $\phi = 2xz^4 - x^2y$. Encuentre $\nabla\phi$ y $|\nabla\phi|$ en el punto $(2, -2, -1)$.

4.43. Suponga que $\mathbf{A} = 2x^2\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ y $\phi = 2z - x^3y$. Encuentre $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ y $\mathbf{A}\times\nabla\phi$ en el punto $(1, -1, 1)$.

4.44. Suponga que $F = x^2z + e^{y/x}$ y $G = 2z^2y - xy^2$. Determine *a*) $\nabla(F + G)$ y *b*) $\nabla(FG)$ en el punto $(1, 0, -2)$.

4.45. Encuentre $\nabla|\mathbf{r}|^3$.

4.46. Demuestre que $\nabla f(r) = \dfrac{f'(r)\mathbf{r}}{r}$.

4.47. Evalúe $\nabla\left(3r^2 - 4\sqrt{r} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{r}}\right)$.

4.48. Sea $\nabla U = 2r^4\mathbf{r}$. Encuentre U.

4.49. Determine $\phi(r)$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{r}/r^5$ y $\phi(1) = 0$.

4.50. Encuentre $\nabla\psi$, donde $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4.51. Sea $\nabla\phi = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$. Encuentre $\phi(x, y, z)$ si $\phi(1, -2, 2) = 4$.

4.52. Suponga que $\nabla\psi = (y^2 - 2xyz^3)\mathbf{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\mathbf{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\mathbf{k}$. Determine ψ.

4.53. Sea U una función diferenciable de x, y y z. Demuestre que $\nabla U \cdot d\mathrm{r} = d\mathrm{U}$.

4.54. Suponga que F es una función diferenciable de x, y, z y t, donde x, y y z, son funciones diferenciables de t. Demuestre que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

4.55. Sea $\mathbf{A}$ un vector constante. Demuestre que $\nabla(\mathrm{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

4.56. Suponga que $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Demuestre que $d\mathbf{A} = (\nabla A_1 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{i} + (\nabla A_2 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{j} + (\nabla A_3 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{k}$.

4.57. Pruebe que $\nabla\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G\nabla F - F\nabla G}{G^2}$, si $G \neq 0$.

4.58. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a la superficie del paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 2, 5).

4.59. Determine la normal unitaria trazada hacia fuera de la superficie $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ en el punto (3, 1, -4).

4.60. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie $xz^2 + x^2y = z - 1$ en el punto $(1, -3, 2)$.

4.61. Encuentre ecuaciones para el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(2, -1, 5)$.

4.62. Encuentre la derivada direccional de $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ en $(2, -1, 2)$ en la dirección $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

4.63. Encuentre la derivada direccional de $P = 4e^{2x-y+z}$ en el punto $(1, 1, -1)$ en dirección hacia el punto $(-3, 5, 6)$.

4.64. ¿En qué dirección desde el punto (1, 3, 2) es un máximo la derivada direccional de $\phi = 2xz - y^2$? ¿Cuál es la magnitud de este máximo?

4.65. Encuentre los valores de las constantes a, b y c, de modo que la derivada direccional de $\phi = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en $(1, 2, -1)$ tenga un máximo de magnitud 64 en una dirección paralela al eje z.

4.66. Encuentre el ángulo agudo entre las superficies $xy^2z = 3x + z^2$ y $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ en el punto $(1, -2, 1)$.

4.67. Encuentre las constantes a, b y c de modo que la superficie $ax^2 - byz = (a + 2)x$ sea ortogonal a la superficie $4x^2y + z^3 = 4$ en el punto $(1, -1, 2)$.

4.68. *a*) Sean u y v funciones diferenciables de x, y y z. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que u y v se relacionen funcionalmente por medio de la ecuación $F(u, v) = 0$ es que $\nabla u \times \nabla v = 0$

b) Determine si $u = \arctan x + \arctan y$ y $v = \frac{x + y}{1 - xy}$ están relacionadas funcionalmente.

4.69. *a*) Demuestre que $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ estén relacionadas funcionalmente por medio de la ecuación $F(u, v, w) = 0$.

b) Exprese $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w$ en forma de determinante. Este determinante se llama jacobiano de u, v y w con respecto de x, y y z, que se escribe como $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ o $J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right)$.

c) Determine si $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ y $w = xy + yz + zx$ están relacionadas funcionalmente.

4.70. Sean $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$ y $\phi = 3x^2 - yz$. En el punto $(1, -1, 1)$, calcule *a*) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, *b*) $\mathbf{A} \cdot \nabla\phi$, *c*) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A})$ y *d*) $\nabla \cdot (\nabla\phi)$,.

4.71. Evalúe $\mathrm{div}(2x^2z\mathbf{i} - xy^2z\,\mathbf{j} + 3yz^2\mathbf{k})$.

4.72. Sea $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$. Encuentre $\nabla^2\phi$.

4.73. Evalúe $\nabla^2(\ln r)$.

4.74. Demuestre $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$, donde n es una constante.

4.75. Sea $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$. Determine $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ en el punto $(2, -1, 0)$.

4.76. Suponga que $\boldsymbol{\omega}$ es un vector constante y que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Pruebe que div $\mathbf{v} = 0$.

4.77. Demuestre que $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla^2\phi$.

4.78. Sean $U = 3x^2y$ y $V = xz^2 - 2y$. Evalúe grad[(grad U) $\cdot$ (grad V)].

4.79. Evalúe $\nabla \cdot (r^3\mathbf{r})$.

4.80. Evalúe $\nabla \cdot [r\nabla(1/r^3)]$.

4.81. Evalúe $\nabla^2[\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^2)]$.

4.82. Si $\mathbf{A} = \mathbf{r}/r$, encuentre grad div $\mathbf{A}$.

4.83. *a*) Pruebe que $\nabla^2 f(r) = \dfrac{d^2f}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$. *b*) Encuentre $f(r)$ tal que $\nabla^2 f(r) = 0$.

4.84. Demuestre que el vector $\mathbf{A} = 3y^4z^2\mathbf{i} + 4x^3z^2\mathbf{j} - 3x^2y^2\mathbf{k}$ es solenoidal.

4.85. Pruebe que $\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\mathbf{i} + (3x^3y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\mathbf{k}$ no es solenoidal, pero $\mathbf{B} = xyz^2\mathbf{A}$ sí lo es.

4.86. Encuentre la función diferenciable más general $f(r)$ de modo que $f(r)\mathbf{r}$ sea solenoidal.

4.87. Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{V} = \dfrac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es un "campo sumidero". Grafíquelo y haga una interpretación física.

4.88. Suponga que U y V son campos escalares diferenciables. Demuestre que $\nabla U \times \nabla V$ es solenoidal.

4.89. Sean $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}$ y $\phi = x^2yz$. En el punto $(1, 1, 1)$, encuentre lo siguiente:
a) $\nabla \times \mathbf{A}$, *b*) rot $(\phi\mathbf{A})$, *c*) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, *d*) $\nabla[\mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{A}]$ y *e*) rot grad $(\phi\mathbf{A})$.

4.90. Sea $F = x^2yz$, $G = xy - 3z^2$. Encuentre *a*) $\nabla[(\nabla F) \cdot (\nabla G)]$, *b*) $\nabla \cdot [(\nabla F) \times (\nabla G)]$ y *c*) $\nabla \times [(\nabla F) \times (\nabla G)]$.

4.91. Evalúe $\nabla \times (\mathbf{r}/r^2)$.

4.92. ¿Para qué valor de la constante a el vector $\mathbf{A} = (axy - z^3)\mathbf{i} + (a-2)x^2\mathbf{j} + (1-a)xz^2\mathbf{k}$ tendrá su rotacional igual a cero?

4.93. Demuestre que rot(ϕ grad ϕ) = $\mathbf{0}$.

4.94. Grafique los campos vectoriales $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Calcule la divergencia y el rotacional de cada campo vectorial y explique el significado físico de los resultados obtenidos.

4.95. Dadas $\mathbf{A} = x^2z\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = y^2\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + 2x\boldsymbol{\kappa}$ y $\phi = 2x^2 + yz$. Calcule
a) $\mathbf{A} \cdot (\nabla\phi)$, *b*) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$, *c*) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, *d*) $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla)$ y *e*) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$.

4.96. Suponga que $\mathbf{A} = yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$, y $\phi = xyz$. Encuentre *a*) $\mathbf{A} \times (\nabla\phi)$, *b*) $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi$, *c*) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$ y *d*) $\mathbf{B} \cdot \nabla - \mathbf{A}$.

4.97. Dadas $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3xz\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$. Encuentre $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$ y $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$ en el punto $(1, -1, 2)$.

4.98. Pruebe que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$.

4.99. Demuestre que $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

4.100. Pruebe que $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$.

4.101. Demuestre que $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$.

4.102. Demuestre que $\mathbf{A} = (6xy + z^3)\mathbf{i} + (3x^2 - z)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k}$ es irrotacional. Determine ϕ de modo que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

4.103. Pruebe que $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^2$ es irrotacional. Determine ϕ tal que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ y tal que $\phi(a) = 0$, donde $a > 0$.

4.104. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son irrotacionales. Demuestre que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es solenoidal.

4.105. Suponga que $f(r)$ es diferenciable. Demuestre que $f(r)\mathbf{r}$ es irrotacional.

4.106. ¿Hay alguna función vectorial diferenciable tal que *a*) rot $\mathbf{V} = \mathbf{r}$, *b*) rot $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? Si así fuera, encuentre $\mathbf{V}$.

4.107. Demuestre que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

donde ρ es una función de x, y y z, y c es la velocidad de la luz, que se supone constante, están dadas por

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

donde $\mathbf{A}$ y ϕ, que reciben los nombres de *potencial vectorial* y *potencial escalar*, respectivamente, satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{3}$$

4.108. *a*) Dada la díada $\mathbf{\Phi} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$, evalúe $\mathrm{r} \cdot (\mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{r})$ y $(\mathrm{r} \cdot \mathbf{\Phi}) \cdot \mathrm{r}$. *b*) ¿Hay alguna ambigüedad al escribir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{r}$? *c*) ¿Qué representa geométricamente $\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{r} = 1$?

4.109. *a*) Suponga que $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2z^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$. Diga un posible significado de $(\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{B}$ en el punto $(1, -1, 1)$.
b) ¿Es posible escribir el resultado como $(\mathbf{A} \times \nabla\mathbf{B})$ con el uso de díadas?

4.110. Demuestre que $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ es un invariante escalar con una rotación de ejes.

4.111. Sea $\mathbf{A}(x, y, z)$ un campo vectorial diferenciable invariante con respecto de una rotación de ejes. Demuestre que *a*) div $\mathbf{A}$ y *b*) rot $\mathbf{A}$, son campos escalar y vectorial invariantes, respectivamente.

4.112. Resuelva las ecuaciones (3) del problema resuelto 4.38, para x, y y z, en términos de x', y' y z'.

4.113. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son invariantes en una rotación. Demuestre que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ también son invariantes.

4.114. Demuestre que con una rotación

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'} = \nabla'$$

4.115. Demuestre que el operador laplaciano es invariante con una rotación.

4.116. Suponga que $\mathbf{A} = x^2z^2\mathbf{i} - 2y^2z^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ y $\phi = 2x^2yz^3$. Encuentre:
a) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$, *b*) $\mathbf{A} \cdot \nabla\phi$, *c*) $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\phi$, *d*) $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi$ y *e*) $\mathbf{A} \times \nabla\phi$.

4.117. Pruebe que *a*) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ y *b*) $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.42. $10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k},\ 2\sqrt{93}$

4.43. $5,\ 7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

4.44. *a*) $-4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$, *b*) $-8\mathbf{j}$

4.45. $3r\mathbf{r}$

4.47. $(6 - 2r^{-3/2} - 2r^{-7/3})$r

4.48. $\mathbf{r}^6/3$ + constante

4.49. $\phi(r) = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{r^3}\right)$

4.50. $(2 - r)e^{-r}\mathbf{r}$

4.51. $\phi = x^2yz^3 + 20$

4. 52. $\omega = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + (3/2)z^4$ + constante

4.58. $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})/\pm\sqrt{21}$

4.59. $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

4.60. $2x - y - 3z + 1$

4.61. $4x - 2y - z = 5,\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-5}{-1}$

o $x = 4t + 2,\ y = -2t - 1,\ z = -t + 5$

4.62. 376/7

4.63. $-20/9$

4.64. En la dirección de $4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ 2\sqrt{14}$

4.65. $a = 6$, $b = 24$ y $c = -8$

4.66. $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{14} = 79°55'$

4.67. $a = 5/2$ y $b = 1$

4.68. *b*) Sí ($v = \tan u$)

4.69. *b*) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$ *c*) Sí ($u^2 - v - 2w = 0$)

4.70. *a*) 4, *b*) -15, *c*) 1 y *d*) 6

4.71. $4xz - 2xyz + 6y^2z$

4.72. $6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2z$

4.73. $1/r^2$

4.75. $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$

4.78. $(6yz^2 - 12x)\mathbf{i} + 6xz^2\mathbf{j} + 12xyz\mathbf{k}$

4.79. $6r^3$

4.80. $3r^{-4}$

4.81. $2r^{-4}$

4.82. $-2r^{-3}\mathbf{r}$

4.83. $f(r) = A + B/r$, donde A y B son constantes arbitrarias.

4.86. $f(r) = C/r^3$, donde C es una constante arbitraria.

4.89. *a*) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, *b*) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, *c*) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, *d*) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y *e*) $\mathbf{0}$

4.90. *a*) $(2y^2z + 3x^2z - 12xyz)\mathbf{i} + (4xyz - 6x^2z)\mathbf{j} + (2xy^2 + x^3 - 6x^2y)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{0}$

c) $(x^2z - 24xyz)\mathbf{i} - (12x^2z + 2xyz)\mathbf{j} + (2xy^2 + 12yz^2 + x^3)\mathbf{k}$

4.91. $\mathbf{0}$

4.92. $a = 4$

4.95. *a*) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$

b) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$ (igual que el inciso *a*))

c) $2y^2z^3\mathbf{i} + (3xy^2 - yz^4)\mathbf{j} + 2x^2z\mathbf{k}$

d) el operador $(x^2y^2z\mathbf{i} - x^2yz^2\mathbf{j} + 2x^3z\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial x} + (y^3z^3\mathbf{i} - y^2z^4\mathbf{j} + 2xyz^3\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial y} + (-3xy^3\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} - 6x^2y\mathbf{k})\dfrac{\partial}{\partial z}$

e) $(2xy^2z + y^2z^3)\mathbf{i} - (2xyz^2 + yz^4)\mathbf{j} + (4x^2z + 2xz^3)\mathbf{k}$

4.96. *a*) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$

b) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$ (igual que el inciso *a*))

c) $16z^3\mathbf{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\mathbf{j} + 32xz^2\mathbf{k}$ *d*) $24x^2z + 4xyz^2$

4.97. $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = 4\mathbf{j} + 76\mathbf{k}$

4.102. $\phi = 3x^2 + xz^3 - yz + \text{constante}$

4.103. $\phi = \ln(a/r)$

4.106. *a*) No, *b*) $\mathbf{V} = 3x\mathbf{j} + (2y - x)\mathbf{k} + \nabla\phi$, donde ϕ es una función arbitraria diferenciable dos veces.

4.108. *a*) $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi}) \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$, *b*) No, *c*) Esfera de radio uno con centro en el origen.

4.109. *a*) $-4\mathbf{ii} - \mathbf{ij} + 3\mathbf{ik} - \mathbf{jj} - 4\mathbf{ji} + 3\mathbf{kk}$

b) Sí, si las operaciones se ejecutan en forma apropiada.

4.112. $x = l_{11}x' + l_{21}y' + l_{31}z'$, $y = l_{12}x' + l_{22}y' + l_{32}z'$, $z = l_{13}x' + l_{23}y' + l_{33}z'$

4.116. *a*) = *b*) $4x^3yz^5 - 4x^2y^2z^5 + 6x^3y^3z^3$

c) $(2x^3z^2 - 2x^3yz)\mathbf{i} + (-4y^2z^3 + 4xy^3z)\mathbf{j} + (x^2y^2z + 2xy^2z^2 - x^3y^3)\mathbf{k}$

d) = *e*) $(-12x^2y^3z^4 - 2x^3y^2z^4)\mathbf{i} + (-6x^4yz^4 + 4x^2y^3z^4)\mathbf{j} + (2x^4z^5 + 8xy^3z^5)\mathbf{k}$

CAPÍTULO 5

Integración vectorial

5.1 INTRODUCCIÓN

El lector ya está familiarizado con la integración de funciones de una variable evaluadas con números reales, $f(x)$. En específico, tenemos la integral indefinida o antiderivada, que se denota así:

$$\int f(x)\,dx$$

y la integral definida en un intervalo cerrado como $[a, b]$, cuya notación es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

En este capítulo se amplían estas definiciones a funciones de una variable evaluadas con vectores.

5.2 INTEGRALES ORDINARIAS DE FUNCIONES EVALUADAS CON VECTORES

Sea $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ un vector que depende de una sola variable escalar, u, donde se supone que $R_1(u)$, $R_2(u)$ y $R_3(u)$ son continuas en un intervalo específico. Entonces,

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \mathbf{i}\int R_1(u)\,du + \mathbf{j}\int R_2(u)\,du + \mathbf{k}\int R_3(u)\,du$$

se denomina *integral indefinida* de $\mathbf{R}(u)$. Si existe un vector $\mathbf{S}(u)$ tal que

$$\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u)),$$

entonces

$$\int \mathbf{R}(u)\,du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c}$ es un *vector constante arbitrario* que es independiente de u. En ese caso, la *integral definida* entre los límites $u = a$ y $u = b$ se escriben como sigue:

$$\int_a^b \mathbf{R}(u)\,du = \int_a^b \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + \mathbf{c}\Big|_a^b = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

Esta integral también puede definirse como el límite de una suma en forma análoga a como se hace en el cálculo integral elemental.

EJEMPLO 5.1 Suponga que $\mathbf{R}(u) = u^2\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $\int \mathbf{R}(u)\,du$, *b*) $\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du$.

a) $$\int \mathbf{R}(u)\,du = \int [u^2\mathbf{i} + 2u^3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}]\,du = \mathbf{i}\int u^2\,du + \mathbf{j}\int 2u^3\,du + \mathbf{k}\int -5\,du$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} + c_1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{u^4}{2} + c_2\right)\mathbf{j} + (-5u + c_3)\mathbf{k}$$

$$= \frac{u^3}{3}\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 5u\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector constante $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

b) Del inciso *a*):

$$\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du = \left.\frac{u^3}{3}\mathbf{i} + \frac{u^4}{2}\mathbf{j} - 5u\mathbf{k} + \mathbf{c}\right|_1^2 = [(8/3)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}] - [-(1/3)\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - 5\mathbf{k}]$$

$$= (7/3)\mathbf{i} + (7/2)\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

5.3 INTEGRALES DE LÍNEA

Suponga que $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ es el vector de posición de puntos $P(x, y, z)$ y que $\mathbf{r}(u)$ define una curva C que une los puntos P_1 y P_2, donde $u = u_1$ y $u = u_2$, respectivamente.

Suponemos que C está compuesta de un número finito de curvas para cada una de las cuales $\mathbf{r}(u)$ tiene una derivada continua. Sea $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ una función vectorial de posición definida y continua a lo largo de C. Entonces, la integral de la componente tangencial de $\mathbf{A}$ a lo largo de C de P_1 a P_2 se denota como sigue:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

es un ejemplo de *integral de línea*. Si $\mathbf{A}$ es la fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de C, esta integral de línea representa el trabajo realizado por la fuerza. Si C es una curva cerrada (que supondremos es una *curva cerrada simple*, es decir, una curva que no se interseca consigo misma en ningún punto), es frecuente denotar la integral alrededor de C del modo siguiente:

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

En aerodinámica y dinámica de fluidos esta integral recibe el nombre de *circulación* de $\mathbf{A}$ sobre C, donde $\mathbf{A}$ representa la velocidad de un fluido.

En general, cualquier integral que se evalúe a lo largo de una curva se llama *integral de línea*. Dichas integrales se definen en términos de límites de sumas del mismo modo que se hace en el cálculo elemental.

EJEMPLO 5.2 Suponga que $\mathbf{F} = -3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}$ y sea C la curva $y = 2x^2$ en el plano xy. Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $P_1(0, 0)$ a $P_2(1, 2)$.

Como la integración se lleva a cabo en el plano xy $(z = 0)$, se toma $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Entonces:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (-3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (-3x^2\,dx + 5xy\,dy).$$

Primer método. Sea $x = t$ en $y = 2x^2$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de C son $x = t$ y $y = 2t^2$. Los puntos (0, 0) y (1, 2) corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Por tanto:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} [-3t^2\, dt + 5t(2t^2)\, d(2t^2)] = \int_{t=0}^{1} (-3t^2 + 40t^4)\, dt = \left[-t^3 + 8t^5\right]_0^1 = 7.$$

Segundo método. Se sustituye $y = 2x^2$ directamente, donde x va de 0 a 1. Queda:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^{1} [-3x^2\, dx + 5x(2x^2)\, d(2x^2)] = \int_{x=0}^{1} (-3x^2 + 40x^4)\, dx = \left[-x^3 + 8x^5\right]_0^1 = 7.$$

Campos conservativos

Se aplica el teorema siguiente:

TEOREMA 5.1. Suponga que $\mathbf{A} = \nabla\phi$ en cualquier parte de una región R del espacio, donde R está definida por $a_1 \le x \le a_2$, $b_1 \le y \le b_2$, $c_1 \le z \le c_2$, y en la que $\phi(x, y, z)$ es de una sola variable y tiene derivadas continuas en R. Entonces:

i) $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une a P_1 y P_2 en R.

ii) $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$ alrededor de cualquier curva cerrada C en R.

En tal caso, **A** se denomina *campo vectorial conservativo* y ϕ es su *potencial escalar*.

5.4 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sea S una superficie de dos lados, como la que se ilustra en la figura 5-1. Un lado de S se considera de manera arbitraria como el positivo (si S es una superficie cerrada, como una esfera, entonces el lado exterior se toma como el positivo). Una normal unitaria, **n**, a cualquier punto del lado positivo de S se llama *normal unitaria positiva* o *dirigida hacia fuera*.

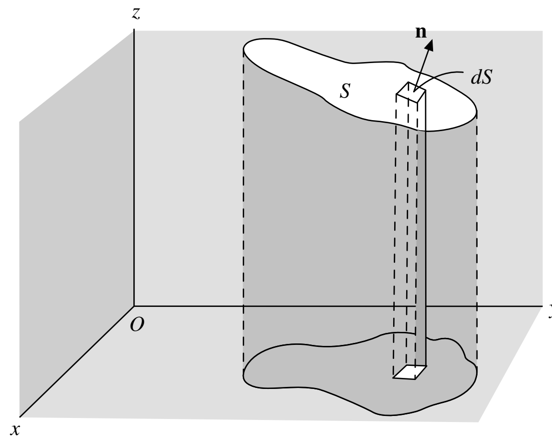


Figura 5-1

Asociemos con la diferencial de la superficie, dS, un vector $d\mathbf{S}$ de magnitud dS y cuya dirección es la de **n**. Entonces, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$. La integral

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

es un ejemplo de una integral de superficie llamada *flujo* de **A** sobre S. Otras integrales de superficie son las siguientes:

$$\iint_S \phi \, dS, \quad \iint_S \phi \mathbf{n} \, dS, \quad \iint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

donde ϕ es una función escalar. Dichas integrales se definen en términos de límites de sumas del modo en que se acostumbra hacerlo en el cálculo elemental (vea el problema 5.17).

En ocasiones se emplea la notación $\oiint_S$ para indicar una integración sobre la superficie cerrada S. Cuando no haya confusión posible también puede usarse la notación $\oint_S$.

Para evaluar integrales de superficie es conveniente expresarlas como integrales dobles tomadas sobre el área proyectada de la superficie S sobre uno de los planos coordenados. Esto es posible si cualquiera de las rectas perpendiculares al plano coordenado escogido interseca a la superficie en no más de un punto. Sin embargo, esto no plantea ningún problema real porque por lo general es posible dividir S en superficies que satisfagan esta restricción.

5.5 INTEGRALES DE VOLUMEN

Considere una superficie cerrada en el espacio que encierra un volumen V. Entonces, las *integrales de volumen* o *integrales espaciales*, como en ocasiones son llamadas, se denotan como sigue:

$$\iiint_V \mathbf{A} \, dV \quad \text{y} \quad \iiint_V \phi \, dV$$

En los problemas resueltos se evalúan algunas de dichas integrales.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. Suponga que $\mathbf{R}(u) = 3\mathbf{i} + (u^3 + 4u^7)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$. Encuentre: *a*) $\int \mathbf{R}(u)\, du$ y *b*) $\int_1^2 \mathbf{R}(u)\, du$.

Solución

a)
$$\begin{aligned}
\int \mathbf{R}(u)\, du &= \int \left[3\mathbf{i} + (u^3 + 4u^7)\mathbf{j} + u\mathbf{k}\right] du \\
&= \mathbf{i}\int 3\, du + \mathbf{j}\int (u^3 + 4u^7)\, du + \mathbf{k}\int u\, du \\
&= (3u + c_1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^8 c_2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}u^2 + c_3\right)\mathbf{k} \\
&= (3u)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^8\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}u^2\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector constante $c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

b) Del inciso *a*),

$$\int_1^2 \mathbf{R}(u)\, du = \left[(3u)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^8\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}u^2\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}\right]_1^2 = 3\mathbf{i} + \frac{525}{4}\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}.$$

Otro método

$$\int_1^2 \mathbf{R}(u)\,du = \mathbf{i}\int_1^2 3\,du + \mathbf{j}\int_1^2 (u^3 + 4u^7)\,du + \mathbf{k}\int_1^2 u\,du$$

$$= [3u]_1^2\mathbf{i} + \left[\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^8\right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^2\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \frac{525}{4}\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}.$$

5.2. La aceleración de una partícula en cualquier momento $t \geq 0$ está dada por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (25\cos 2t)\mathbf{i} + (16\text{ sen } 2t)\mathbf{j} + (9t)\mathbf{k}.$$

Solución

Suponga que la velocidad $\mathbf{v}$ y el desplazamiento $\mathbf{r}$ son dos vectores cero en $t = 0$. Calcule $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ en cualquier momento. Al integrar se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\int(25\cos 2t)\,dt + \mathbf{j}\int(16\text{ sen } 2t)\,dt + \mathbf{k}\int(9t)\,dt$$

$$= \left(\frac{25}{2}\text{ sen } 2t\right)\mathbf{i} + (-8\cos 2t)\mathbf{j} + \left(\frac{9}{2}t^2\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}_1.$$

Al hacer $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, llegamos a $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$, y $\mathbf{c}_1 = 8\mathbf{j}$. Entonces:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{25}{2}\text{ sen } 2t\right)\mathbf{i} + (8 - 8\cos 2t)\mathbf{j} + \left(\frac{9}{2}t^2\right)\mathbf{k}.$$

Se integra:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\int\left(\frac{25}{2}\text{ sen } 2t\right)dt + \mathbf{j}\int(8 - 8\cos 2t)\,dt + \mathbf{k}\int\left(\frac{9}{2}t^2\right)dt$$

$$= \left(-\frac{25}{4}\cos 2t\right)\mathbf{i} + (8t + 4\text{ sen } 2t)\mathbf{j} + \left(\frac{3}{2}t^3\right)\mathbf{j} + \mathbf{c}_2.$$

Al hacer $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ cuando $t = 0$, se llega a:

$$\mathbf{0} = -\frac{25}{4}\mathbf{i} + \mathbf{c}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_2 = \frac{25}{4}\mathbf{i}.$$

Entonces:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{4}\cos 2t\right)\mathbf{i} + (8 + 4\text{ sen } 2t)\mathbf{j} + \left(\frac{3}{2}t^3\right)\mathbf{k}.$$

5.3. Evalúe $\int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt$.

Solución

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

Se integra:

$$\int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt = \int \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)dt = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}.$$

5.4. La ecuación del movimiento de una partícula P de masa m está dada por

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\mathbf{r}_1$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de P medido a partir de un origen O, $\mathbf{r}_1$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, y $f(r)$ es una función de la distancia de P desde O.

a) Demuestre que $\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.
b) Interprete físicamente los casos en que $f(r) < 0$ y $f(r) > 0$.
c) Haga la interpretación del resultado del inciso *a*), geométricamente.
d) Describa cómo se relacionan los resultados obtenidos con el movimiento de los planetas en nuestro sistema solar.

Solución

a) Se multiplican los dos lados de $m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = f(r)\mathbf{r}_1$ por $\mathbf{r}\times$. Entonces:

$$m\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$$

como $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_1$ son colineales, entonces $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$. Por esto:

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{0}$$

Al integrar, $\mathbf{r} \times \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante (compare esto con el resultado del problema 5.3).

b) Si $f(r) < 0$, la aceleración $d^2\mathbf{r}/dt^2$ tiene dirección opuesta a $\mathbf{r}_1$; entonces, la fuerza está dirigida hacia O y la partícula siempre es *atraída* hacia O.

Si $f(r) > 0$, la fuerza está dirigida hacia fuera de O y la partícula está sujeta a la influencia de una fuerza de *repulsión* en O.

Una fuerza dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O, y que tenga una magnitud que sólo dependa de la distancia r hasta O, se llama *fuerza central*.

c) En el tiempo Δt, la partícula se mueve de M a N (vea la figura 5-2). El área barrida por el vector de posición en este tiempo es aproximadamente la de un paralelogramo con lados $\mathbf{r}$ y $\Delta\mathbf{r}$, o $\frac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}$. Entonces, el área aproximada barrida por el radio vector por unidad de tiempo es $\frac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}/\Delta t$; así, la tasa instantánea de cambio del área con respecto del tiempo es

$$\lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad instantánea de la partícula. La cantidad $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}/dt) = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ se llama *velocidad superficial*. Del inciso *a*) tenemos que:

$$\text{velocidad superficial} = \mathbf{H} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{constante}$$

Como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = 0$, el movimiento tiene lugar en un plano, que en la figura 5-2 se toma como el plano xy.

d) Un planeta (como la Tierra) es atraído por el Sol de acuerdo con la ley universal de la gravitación de Newton, que establece que dos objetos cualesquiera de masas m y M, respectivamente, se atraen mutuamente con una fuerza de magnitud $F = GMm/r^2$, donde r es la distancia entre los objetos y G es una constante universal.

Sean m y M las masas del planeta y el Sol, respectivamente, y se escoge un conjunto de ejes coordenados con origen en O en el Sol. Entonces, la ecuación de movimiento del planeta es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \quad \text{o} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1$$

con la suposición de que la influencia de los demás planetas es despreciable.

De acuerdo con el inciso *c*), un planeta se mueve alrededor del Sol de modo tal que su vector de posición recorre áreas iguales en tiempos iguales. Este resultado y el del problema 5.5 son dos de las tres famosas leyes de Kepler que éste dedujo en forma empírica a partir de las enormes cantidades de datos recabados por el astrónomo Tycho Brahe. Estas leyes permitieron a Newton la formulación de su ley universal de la gravitación. Para la tercera ley de Kepler, vea el problema 5.36.

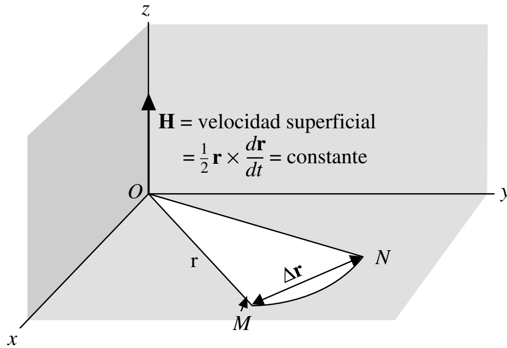


Figura 5-2

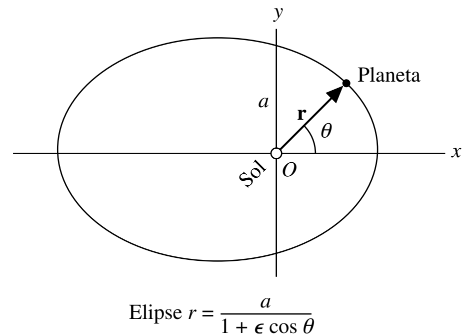


Figura 5-3

5.5. Demuestre que la trayectoria de un planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos.

Solución

De los problemas 5.4*c*) y 5.4*d*),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{H} = \mathbf{h} \tag{2}$$

Ahora, $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}/dt = r(d\mathbf{r}_1/dt) + (dr/dt)\mathbf{r}_1$, de modo que

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{r}_1 \times \left(r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1 \right) = r^2\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \tag{3}$$

De la ecuación (1):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{h} = -GM\mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$

$$= -GM\left[\left(\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right] = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

con el empleo de la ecuación (3) y el hecho de que $\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{r}_1/dt) = 0$ (vea el problema 3.9). Pero como $\mathbf{h}$ es un vector constante,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h})$$

por lo que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

Al integrar queda:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}$$

de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) &= GM\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\\ &= GMr + r\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{p} = GMr + rp\cos\theta\end{aligned}$$

donde $\mathbf{p}$ es un vector constante arbitrario con magnitud p y θ es el ángulo entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}_1$.

Como $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = h^2$, tenemos que $h^2 = GMr + rp\cos\theta$, y

$$r = \frac{h^2}{GM + p\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (p/GM)\cos\theta}$$

De la geometría analítica se sabe que la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen y excentricidad ϵ, es $r = a/(1 + \epsilon\cos\theta)$, donde a es una constante (vea la figura 5-3). Al comparar ésta con la ecuación obtenida, se observa que la órbita requerida es una sección cónica con excentricidad $\epsilon = p/GM$. La órbita es una elipse, parábola o hipérbola, según sea ϵ menor, igual o mayor que uno. Como las órbitas de los planetas son curvas cerradas, se concluye que deben ser elipses.

Integrales de línea

5.6. Suponga que $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}$. Evalúe $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ de (0, 0, 0) a (1, 1, 1), a lo largo de las trayectorias C siguientes:

a) $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$.
b) la línea recta que va de (0, 0, 0) a (1, 0, 0), que luego va a (1, 1, 0) y después a (1, 1, 1).
c) la línea recta que une al punto (0, 0, 0) con (1, 1, 1).

Solución

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left[(3x^2+6y)\mathbf{i} - 14yz\mathbf{j} + 20xz^2\mathbf{k}\right]\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})\\ &= \int_C (3x^2+6y)\,dx - 14yz\,dy + 20xz^2\,dz\end{aligned}$$

a) Si $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$, los puntos (0, 0, 0) y (1, 1, 1) corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^{1} (3t^2+6t^2)\,dt - 14(t^2)(t^3)\,d(t^2) + 20(t)(t^3)^2\,d(t^3)\\ &= \int_{t=0}^{1} 9t^2\,dt - 28t^6\,dt + 60t^9\,dt\\ &= \int_{t=0}^{1} (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big|_0^1 = 5\end{aligned}$$

Otro método

A lo largo de C, $\mathbf{A} = 9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k}$ y de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y de $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^{1} (9t^2\mathbf{i} - 14t^5\mathbf{j} + 20t^7\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt\\ &= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = 5\end{aligned}$$

b) A lo largo de la línea recta que va de (0, 0, 0) a (1, 0, 0), $y = 0$, $z = 0$, $dy = 0$ y $dz = 0$, mientras que x varía de 0 a 1. Entonces, la integral sobre esta parte de la trayectoria es:

$$\int_{x=0}^{1} (3x^2 + 6(0))\, dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^{1} 3x^2\, dx = x^3\Big|_0^1 = 1$$

A lo largo de la línea recta que va de (1, 0, 0) a (1, 1, 0), $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$ y $dz = 0$, en tanto que y varía de 0 a 1. Con esto, la integral por esta parte de la trayectoria resulta:

$$\int_{y=0}^{1} (3(1)^2 + 6y)0 - 14y(0)\, dy + 20(1)(0)^2 0 = 0$$

Sobre la línea recta que une (1, 1, 0) con (1, 1, 1), $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0$, $dy = 0$, y z varía de 0 a 1. Así que la integral sobre esta parte de la trayectoria es:

$$\int_{z=0}^{1} (3(1)^2 + 6(1))0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2\, dz = \int_{z=0}^{1} 20z^2\, dz = \frac{20z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

Al sumar se llega a lo siguiente:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

c) La línea recta que une al punto (0, 0, 0) con (1, 1, 1) está dada en forma paramétrica por $x = t$, $y = t$ y $z = t$. Entonces:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2 + 6t)\, dt - 14(t)(t)\, dt + 20(t)(t)^2\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3)\, dt = \int_{t=0}^{1} (6t - 11t^2 + 20t^3)\, dt = \frac{13}{3}$$

5.7. Calcule el trabajo total realizado cuando se mueve una partícula en el campo de fuerzas dado por $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, a lo largo de la hélice C, dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $z = t$, de $t = 0$ a $t = \pi/2$.

Solución

$$\text{Trabajo total} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (z\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = \int_C (z\, dx + z\, dy + x\, dz)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (t\, d(\cos t) + t\, d(\operatorname{sen} t) + \cos t\, dt) = \int_0^{\pi/2} (-t \operatorname{sen} t)\, dt + \int_0^{\pi/2} (t + 1)\cos t\, dt$$

Al evaluar $\int_0^{\pi/2} (-t \operatorname{sen} t)\, dt$ por partes se obtiene lo siguiente:

$$[t \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 0 - [\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = -1.$$

La evaluación de $\int_0^{\pi/2} (t + 1) \cos t\, dt$ por partes arroja:

$$[(t + 1) \operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = \frac{\pi}{2} + 1 + [\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Con lo que el trabajo total es $(\pi/2) - 1$.

5.8. Suponga que $\mathbf{F} = -3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva en el plano xy, $y = 2x^2$, de (0, 0) a (1, 2).

Solución

Como la integración se lleva a cabo en el plano xy ($z = 0$), se puede tomar $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (-3x^2\mathbf{i} + 5xy\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C (-3x^2\, dx + 5xy\, dy).$$

Primer método. Sea $x = t$ en $y = 2x^2$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de C son $x = t$ y $y = 2t^2$. Los puntos (0, 0) y (1, 2) corresponden a $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} [-3t^2\, dt + 5t(2t^2)\, d(2t^2)] = \int_{t=0}^{1} (-3t^2 + 40t^4)\, dt = \left[-t^3 + 8t^5\right]_0^1 = 7.$$

Segundo método. Se sustituye $y = 2x^2$ directamente, donde x va de 0 a 1. Entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^{1} [-3x^2\, dx + 5x(2x^2)\, d(2x^2)] = \int_{x=0}^{1} (-3x^2 + 40x^4)\, dx = \left[-x^3 + 8x^5\right]_0^1 = 7.$$

5.9. Suponga que un campo de fuerzas está dado por

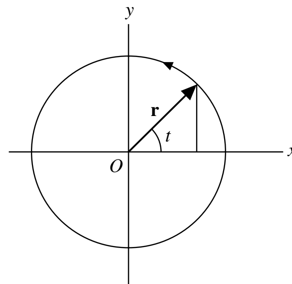
$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

Calcule el trabajo realizado cuando se mueve una partícula alrededor de un círculo C en el plano xy con centro en el origen y radio igual a 3.

Solución

En el plano $z = 0$, $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, por lo que el trabajo realizado es

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_C (2x - y)\, dx + (x + y)\, dy\end{aligned}$$



$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
$= 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \text{ sen } t\mathbf{j}$

Figura 5-4

Se eligen las ecuaciones paramétricas de la circunferencia como $x = 3 \cos t$ y $y = 3 \operatorname{sen} t$, donde t varía de 0 a 2π (como se observa en la figura 5-4). Entonces, la integral de línea es:

$$\int_{t=0}^{2\pi} [2(3 \cos t) - 3 \operatorname{sen} t](-3 \operatorname{sen} t)\, dt + (3 \cos t + 3 \operatorname{sen} t)(3 \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9 \operatorname{sen} t \cos t)\, dt = 9t - \frac{9}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

Al recorrer C, escogimos el sentido contra el movimiento de las manecillas del reloj que se indica en la figura. Es la dirección *positiva*, lo que significa que C fue recorrida en el sentido positivo. Si C se recorriera en el sentido (negativo) a favor del movimiento de las manecillas del reloj, el valor de la integral sería -18π.

5.10. *a*) Suponga que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es univaluada y tiene derivadas continuas. Demuestre que el trabajo realizado cuando una partícula se mueve de un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ en dicho campo a otro punto $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$, es independiente de la trayectoria que los une.

b) A la inversa, suponga que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une dos puntos cualesquiera. Demuestre que existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

Solución

a)

$$\text{Trabajo realizado} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

Entonces, la integral depende sólo de los puntos P_1 y P_2, y no de la trayectoria que los une. Esto se cumple, por supuesto, sólo si $\phi(x, y, z)$ es univaluada en todos los puntos P_1 y P_2.

b) Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$. Por hipótesis, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une dos puntos cualesquiera, los que designamos como (x_1, y_1, z_1) y (x, y, z), respectivamente. Entonces:

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

es independiente de la trayectoria que une a (x_1, y_1, z_1) con (x, y, z). Entonces:

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) &= \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x,y,z)}^{(x_1,y_1,z_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz\end{aligned}$$

Como la última integral debe ser independiente de la trayectoria que une a (x, y, z) con $(x + \Delta x, y, z)$, se debe escoger la trayectoria de modo que sea una línea recta que los una a fin de que dy y dz sean igual a cero. Así:

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1\,dx$$

Al obtener límites en ambos lados cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que $\partial\phi/\partial x = F_1$. De manera similar, se puede demostrar que $\partial\phi/\partial y = F_2$ y $\partial\phi/\partial z = F_3$. Entonces,

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi.$$

Si $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une a P_1 y P_2, entonces $\mathbf{F}$ recibe el nombre de *campo conservativo*. Se concluye que si $\mathbf{F} = \nabla\phi$ entonces $\mathbf{F}$ es conservativo, y a la inversa.

Demostración con el uso de vectores. Si la integral de línea es independiente de la trayectoria, entonces

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}ds$$

Por diferenciación, $d\phi/ds = \mathbf{F}\cdot(d\mathbf{r}/ds)$. Pero $d\phi/ds = \nabla\phi\cdot(d\mathbf{r}/ds)$ por lo que $(\nabla\phi - \mathbf{F})\cdot(d\mathbf{r}/ds) = 0$. Como esto debe cumplirse sin importar $d\mathbf{r}/ds$, tenemos que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

5.11. *a*) Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo. Demuestre que rot $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (es decir, $\mathbf{F}$ es irrotacional).

b) A la inversa, si $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (por lo que $\mathbf{F}$ es irrotacional), demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Solución

a) Si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo, entonces, según el problema 5.10, $\mathbf{F} = \nabla\phi$.
Entonces, rot $\mathbf{F} = \nabla\times\nabla\phi = \mathbf{0}$ (vea el problema 4.27*a*), en el capítulo 4).

b) Si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$, por lo que

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Debe demostrarse que como consecuencia de esto se cumple que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.
El trabajo realizado al moverse la partícula de (x_1, y_1, z_1) a (x, y, z) en el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es:

$$\int_C F_1(x, y, z)\ dx + F_2(x, y, z)\ dy + F_3(x, y, z)\ dz$$

donde C es una trayectoria que une a (x_1, y_1, z_1) con (x, y, z). Elijamos como trayectoria particular segmentos de línea recta que vayan de (x_1, y_1, z_1) a (x, y_1, z_1), a (x, y, z_1) y a (x, y, z), y llamemos a $\phi(x, y, z)$ el trabajo realizado a lo largo de esta trayectoria particular. Entonces:

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_1}^{x} F_1(x, y_1, z_1)\ dx + \int_{y_1}^{y} F_2(x, y, z_1)\ dy + \int_{z_1}^{z} F_3(x, y, z)\ dz$$

Se concluye que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y, z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z)\ dz \\
&= F_2(x, y, z_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z)\ dz \\
&= F_2(x, y, z_1) + F_2(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z} = F_2(x, y, z_1) + F_2(x, y, z) - F_2(x, y, z_1) = F_2(x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= F_1(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z_1)\ dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z)\ dz \\
&= F_1(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z_1)\ dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z)\ dz \\
&= F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z_1)\Big|_{y_1}^{y} + F_1(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z} \\
&= F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z_1) - F_1(x, y_1, z_1) + F_1(x, y, z) - F_1(x, y, z_1) = F_1(x, y, z)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi.$$

Así, una condición necesaria y suficiente para que un campo $\mathbf{F}$ sea conservativo es que rot $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

5.12. *a*) Demuestre que $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas conservativo. *b*) Encuentre el potencial escalar. *c*) Calcule el trabajo realizado cuando un objeto se mueve de (1, −2, 1) a (3, 1, 4).

Solución

a) Del problema 5.11 se observa que una condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea conservativa es que rot $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ahora:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por lo que **F** es un campo de fuerzas conservativo.

b) *Primer método.* Según el problema 5.10:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \text{ o } \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}.$$

Entonces:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + z^3 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 3xz^2 \tag{3}$$

Al integrar se obtiene respectivamente de (1), (2) y (3) que:

$$\begin{aligned} \phi &= x^2y + xz^3 + f(y, z) \\ \phi &= x^2y + g(x, z) \\ \phi &= xz^3 + h(x, y) \end{aligned}$$

Esto concuerda si se escoge $f(y, z) = 0$, $g(x, z) = xz^3$ y $h(x, y) = x^2y$ de modo que $\phi = x^2y + xz^3$, a la que puede agregarse cualquier constante.

Segundo método. Como **F** es conservativo, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une a (x_1, y_1, z_1) con (x, y, z). Con el empleo del método descrito en el problema 5.11*b*) se llega a:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \int_{x_1}^{x} \left(2xy_1 + z_1^3\right) dx + \int_{y_1}^{y} x^2\, dy + \int_{z_1}^{z} 3xz^2\, dz \\ &= \left(x^2y_1 + xz_1^3\right)\Big|_{x_1}^{x} + x^2y\Big|_{y_1}^{y} + xz^3\Big|_{z_1}^{z} \\ &= x^2y_1 + xz_1^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 + x^2y - x^2y_1 + xz^3 - xz_1^3 \\ &= x^2y + xz^3 - x_1^2y_1 - x_1z_1^3 = x^2y + xz^3 + \text{constante} \end{aligned}$$

Tercer método.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = d\phi.$$

Entonces:

$$d\phi = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (2xy + z^3)\ dx + x^2\ dy + 3xz^2\ dz$$
$$= (2xy\ dx + x^2\ dy) + (z^3\ dx + 3xz^2\ dz)$$
$$= d(x^2y) + d(xz^3) = d(x^2y + xz^3)$$

y $\phi = x^2y + xz^3 +$ constante.

c) Trabajo realizado $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{P_1}^{P_2} (2xy + z^3)\ dx + x^2\ dy + 3xz^2\ dz$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} d(x^2y + xz^3) = x^2y + xz^3\Big|_{P_1}^{P_2} = x^2y + xz^3\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = 202$$

Otro método

Del inciso *b*), $\phi(x, y, z) = x^2y + xz^3 +$ constante.
Entonces, el trabajo realizado $= \phi(3, 1, 4) - \phi(1, -2, 1) = 202$.

5.13. Demuestre que si $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une dos puntos P_1 y P_2 en una región dada, entonces $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias cerradas en la región, y a la inversa.

Solución

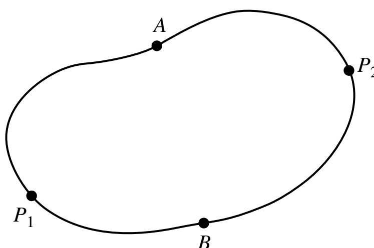


Figura 5-5

Sea $P_1AP_2BP_1$ una curva cerrada (vea la figura 5-5). Entonces:

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

ya que, por hipótesis, la integral de P_1 a P_2 a lo largo de una trayectoria a través de A es la misma que a lo largo de otra a través de B.

A la inversa, si $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$, entonces

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

de modo que

$$\int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

5.14. *a*) Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ sea una diferencial exacta, es que $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

b) Demuestre que $(y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\, dx + 2z^3y \operatorname{sen} x\, dy + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\, dz$ es una diferencial exacta de una función ϕ, y encuentre ésta.

Solución

a) Suponga que

$$F_1\; dx + F_2\; dy + F_3\; dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\; dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\; dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\; dz,$$

una diferencial exacta. Entonces, como x, y y z son variables independientes.

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

y así $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = (\partial\phi/\partial x)\mathbf{i} + (\partial\phi/\partial y)\mathbf{j} + (\partial\phi/\partial z)\mathbf{k} = \nabla\phi$. Por tanto $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$.

A la inversa, si $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces, según el problema 5.11, $\mathbf{F} = \nabla\phi$, por lo que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$, es decir, $F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = d\phi$, una diferencial exacta.

b) $\mathbf{F} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\mathbf{i} + 2z^3y \operatorname{sen} x\mathbf{j} + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\mathbf{k}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$ se calcula para que sea igual a cero, por lo que de acuerdo con el inciso *a*):

$$(y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\, dx + 2z^3y \operatorname{sen} x\, dy + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\, dz = d\phi$$

Por cualquiera de los métodos descritos en el problema 5.12 se llega a que $\phi = y^2z^3 \operatorname{sen} x - x^4z + \text{constante}$.

5.15. Sea $\mathbf{F}$ un campo de fuerzas conservativo tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Suponga que una partícula de masa constante m se mueve en él. Si A y B son dos puntos cualesquiera en el espacio, demuestre que

$$\phi(A) + \tfrac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \tfrac{1}{2}mv_B^2$$

donde v_A y v_B son las magnitudes de las velocidades de la partícula en A y en B, respectivamente.

Solución

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Entonces:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2.$$

Al integrar se llega a:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}v^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Si $\mathbf{F} = -\nabla\phi$,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B).$$

Entonces $\phi(A) - \phi(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$, de modo que se llega al resultado.

$\phi(A)$ se llama *energía potencial* en A, y $\frac{1}{2}mv_A^2$ es la *energía cinética* en A. El resultado establece que la energía total en A es igual a la energía total en B (conservación de la energía). Observe el signo menos en la ecuación $\mathbf{F} = -\nabla\phi$.

5.16. Suponga que $\phi = 2xyz^2$, $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ y C es la curva $x = t^2$, $y = 2t$ y $z = t^3$, de $t = 0$ a $t = 1$. Evalúe las integrales de línea *a*) $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$ y *b*) $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$.

Solución

a) A lo largo de C,

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \text{ y}$$

$$d\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\ dt.$$

Entonces

$$\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} 4t^9(2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\ dt$$

$$= \mathbf{i}\int_0^1 8t^{10}\ dt + \mathbf{j}\int_0^1 8t^9\ dt + \mathbf{k}\int_0^1 12t^{11}\ dt = \frac{8}{11}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

b) A lo largo de C, tenemos que $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = 2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$. Entonces:

$$\mathbf{F} \times d\mathbf{r} = (2t^3\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}) \times (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\, dt$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt = \left[(-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} + (2t^5 - 6t^5)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}\right] dt$$

y

$$\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_0^1 (-3t^5 - 2t^4)\ dt + \mathbf{j}\int_0^1 (-4t^5)\ dt + \mathbf{k}\int_0^1 (4t^3 + 2t^4)\ dt$$

$$= -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}$$

Integrales de superficie

5.17. Proporcione una definición de $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\ dS$ sobre una superficie S, en términos del límite de una suma (vea la figura 5-6).

Solución

Subdivida el área S en M elementos de área ΔS_p, donde $p = 1, 2, 3, \ldots, M$. Elija cualquier punto P_p dentro de ΔS_p cuyas coordenadas sean (x_p, y_p, z_p). Defina $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$. Sea $\mathbf{n}_p$ la normal unitaria positiva a ΔS_p en P. De la suma

$$\sum_{p=1}^{M} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p\, \Delta S_p$$

donde $\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p$ es la componente normal de $\mathbf{A}_p$ en P_p.

Ahora se calcula el límite de esta suma cuando $M \to \infty$, de modo que la dimensión más grande de cada ΔS_p tienda a cero. Este límite, si existe, se denomina integral de superficie de la componente normal de **A** sobre S, y se denota así:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

5.18. Suponga que la superficie S tiene la proyección R sobre el plano xy (vea la figura 5-6). Demuestre que

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx \, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Solución

De acuerdo con el problema 5.17, la integral de superficie es el límite de la suma

$$\sum_{p=1}^{M} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \, \Delta S_p \tag{1}$$

La proyección de ΔS_p sobre el plano xy es $|(\mathbf{n}_p \, \Delta S_p) \cdot \mathbf{k}|$ o bien $|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}| \Delta S_p$, que es igual a $\Delta x_p \, \Delta y_p$, por lo que $\Delta S_p = \Delta x_p \Delta y_p / |\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|$. Así, la suma (1) se convierte en:

$$\sum_{p=1}^{M} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \frac{\Delta x_p \, \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|} \tag{2}$$

Según el teorema fundamental del cálculo integral, el límite de esta suma cuando $M \to \infty$ de modo que las más grandes Δx_p y Δy_p tiendan a cero, es:

$$\iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx \, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

y se llega al resultado requerido.

En estricto sentido, el resultado $\Delta S_p = \Delta x_p \, \Delta y_p / |\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|$ sólo es parcialmente verdadero, pero con un análisis más detallado se puede demostrar que difieren sólo en infinitésimos de orden más alto $\Delta x_p \Delta y_p$, y con el uso de esto se demuestra que los *límites* de (1) y (2), en efecto, son iguales.

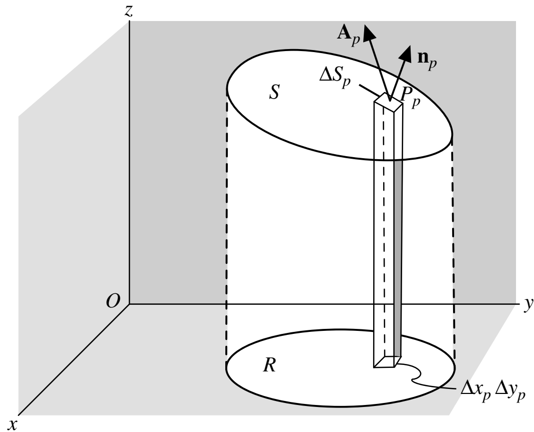


Figura 5-6

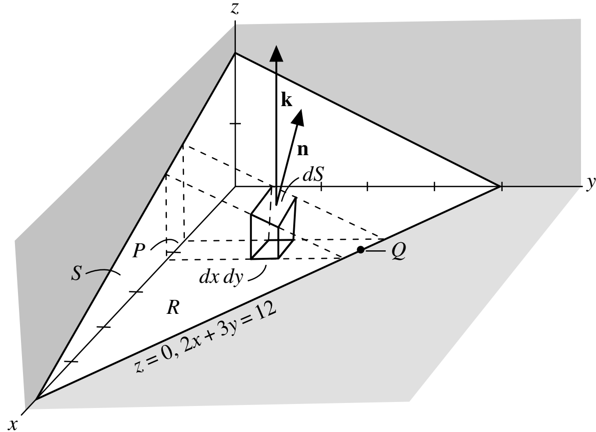


Figura 5-7

5.19. Evalúe $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y S es la región del plano $2x + 3y + 6z = 12$, que se localiza en el primer octante.

Solución

La superficie S y su proyección R sobre el plano xy se presentan en la figura 5-7.

Del problema 5.18,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

Para obtener $\mathbf{n}$, observe que un vector perpendicular a la superficie $2x + 3y + 6z = 12$ está dado por $\nabla(2x + 3y + 6z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (vea el problema 4.5 del capítulo 4). Entonces, una normal unitaria a cualquier punto de S (vea la figura 5-7) es

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \tfrac{2}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}$$

Así, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \left(\tfrac{2}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right) \cdot \mathbf{k} = \tfrac{6}{7}$, por lo que

$$\frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} = \frac{7}{6} dx\, dy.$$

Asimismo,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}) \cdot \left(\tfrac{2}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{6}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{36z - 36 + 18y}{7} = \frac{36 - 12x}{7},$$

con el uso del hecho de que, $z = (12 - 2x - 3y)/6$, de la ecuación de S. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|} = \iint_R \left(\frac{36 - 12x}{7}\right) \frac{7}{6}\, dx\, dy = \iint_R (6 - 2x)\, dx\, dy$$

Para evaluar esta integral doble sobre R, se mantiene fija a x y se integra con respecto de y desde $y = 0$ (P en la figura mencionada) hasta $y = (12 - 2x)/3$ (Q, en la figura); después se integra con respecto de x, de $x = 0$ a $x = 6$. De esta manera, R queda cubierta por completo. La integral se convierte en:

$$\int_{x=0}^{6} \int_{y=0}^{(12-2x)/3} (6 - 2x)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{6} \left(24 - 12x + \frac{4x^2}{3}\right) dx = 24$$

Si se hubiera elegido la normal unitaria positiva $\mathbf{n}$, opuesta a la que se ilustra en la figura 5-7, se habría obtenido -24 como resultado.

5.20. Evalúe $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ ubicado en el primer octante entre $z = 0$ y $z = 5$.

Solución

En la figura 5-8 se proyecta S sobre el plano xz y se llama R a dicha proyección. Observe que en este caso no puede usarse la proyección de S sobre el plano xy. Por tanto,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

Una normal a $x^2 + y^2 = 16$ es $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. Entonces, como se aprecia en la figura 5-8, la normal unitaria a S es

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}$$

ya que $x^2 + y^2 = 16$, sobre S.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3y^2z\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}\right) = \frac{1}{4}(xz + xy)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{4}\cdot\mathbf{j} = \frac{y}{4}.$$

Entonces, la integral de superficie es igual a:

$$\iint_R \frac{xz + xy}{y}\,dx\,dz = \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{\sqrt{16 - x^2}} + x\right)dx\,dz = \int_{z=0}^{5}(4z + 8)\,dz = 90$$

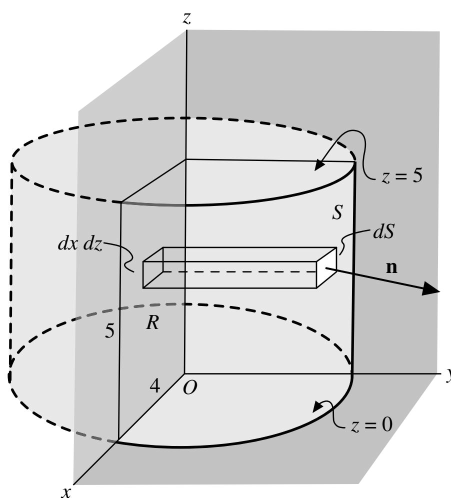


Figura 5-8

5.21. Evalúe $\iint_S \phi\mathbf{n}\,dS$ donde $\phi = \frac{3}{8}xyz$ y S es la superficie descrita en el problema 5.20.

Solución

Tenemos

$$\iint_S \phi\mathbf{n}\,dS = \iint_R \phi\mathbf{n}\frac{dx\,dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$

Con el uso de $\mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/4$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = y/4$, como en el problema 5.20, esta última integral se convierte en:

$$\iint_R \frac{3}{8} xz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\, dx\, dz = \frac{3}{8} \int_{z=0}^{5} \int_{x=0}^{4} (x^2 z\mathbf{i} + xz\sqrt{16 - x^2}\mathbf{j})\, dx\, dz$$

$$= \frac{3}{8} \int_{z=0}^{5} \left(\frac{64}{3} z\mathbf{i} + \frac{64}{3} z\mathbf{j} \right) dz = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j}$$

5.22. Suponga que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x - 2xz)\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sobre el plano xy (vea la figura 5-9).

Solución

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x - 2xz & -xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

Una normal a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

Entonces, la normal unitaria, $\mathbf{n}$, de la figura 5-9 está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

ya que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

La proyección de S sobre el plano xy es la región R acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y $z = 0$ (vea la figura 5-9). Entonces,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

$$= \iint_R (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} \right) \frac{dx\, dy}{z/a}$$

$$= \int_{x=-a}^{a} \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2 + y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

con el uso del hecho de que $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Para evaluar la doble integral se transforma a coordenadas polares (ρ, ϕ) donde $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho$ sen ϕ y $dy\,dx$, es sustituida por $\rho\,d\rho\,d\phi$. La doble integral se convierte en:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \frac{3\rho^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} \frac{3(\rho^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2} + \frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)d\rho\,d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\left[(a^2-\rho^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{a}\right]d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}(a^3-\rho^3)\,d\phi = 0$$

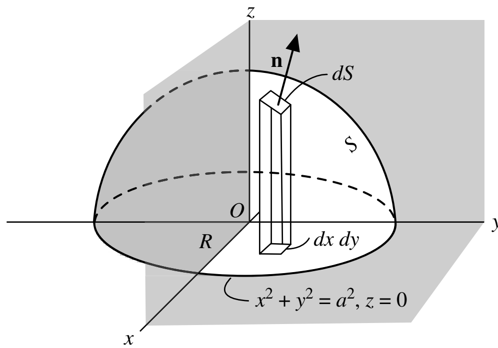


Figura 5-9

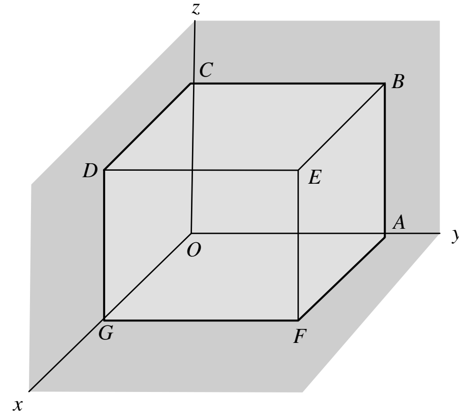


Figura 5-10

5.23. Sea $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, donde S es la superficie del cubo acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ y $z = 0$, $z = 1$ (vea la figura 5-10).

Solución

Cara DEFG: $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $x = 1$. Entonces,

$$\iint_{DEFG} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (4z\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 4z\,dy\,dz = 2$$

Cara ABCO: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $x = 0$. Por lo que

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i})\,dy\,dz = 0$$

Cara ABEF: $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $y = 1$. Así,

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}\, dx\, dz = \int_0^1\int_0^1 -dx\, dz = -1$$

Cara OGDC: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $y = 0$. De modo que

$$\iint_{OGDC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^1\int_0^1 (4xz\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j})\, dx\, dz = 0$$

Cara BCDE: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $z = 1$. Por tanto

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^1\int_0^1 (4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 y\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}$$

Cara AFGO: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $z = 0$. Entonces

$$\iint_{AFGO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{k})\, dx\, dy = 0$$

Al sumar, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$.

5.24. Al estudiar las integrales de superficie nos hemos limitado a aquéllas de dos lados. Dé un ejemplo de superficie que no tenga dos lados.

Solución

Tome una tira de papel como la que se denota con *ABCD* en la figura 5-11. Tuérzala de modo que los puntos *A* y *B* queden sobre *D* y *C*, respectivamente, como se aprecia en la figura 5-11. Si **n** es la normal positiva al punto *P* de la superficie, invierte su dirección original cuando alcanza a *P* otra vez. Si intentáramos colorear un solo lado de la superficie veríamos que toda ella quedaría en color. Esta superficie, llamada *banda de Moebius*, es ejemplo de una superficie de un solo lado. En ocasiones recibe el nombre de superficie *no orientable*. Una superficie de dos lados se llama *orientable*.

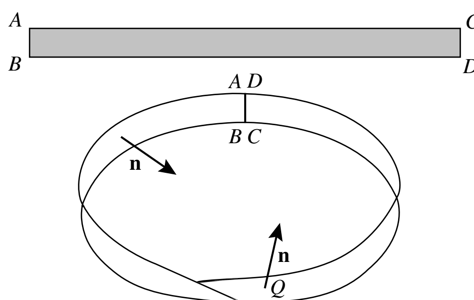


Figura 5-11

Integrales de volumen

5.25. Sea $\phi = 45x^2y$, y que V denote la región cerrada limitada por los planos $4x + 2y + z = 8$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. *a*) Exprese $\iiint_V \phi\, dV$ como el límite de una suma. *b*) Evalúe la integral del inciso anterior.

Solución

a) Subdivida la región V en M cubos con volumen $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$, $k = 1, 2, \ldots, M$, como se ilustra en la figura 5-12, y sea (x_k, y_k, z_k) un punto dentro del cubo. Defina $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$. Considere la suma

$$\sum_{k=1}^{M} \phi_k \Delta V_k \tag{1}$$

tomada sobre todos los cubos posibles en la región. El límite de esta suma, cuando $M \to \infty$ de modo que las cantidades más grandes ΔV_k tiendan a cero, si existe, se denota con $\iiint_V \phi \, dV$. Es posible demostrar que este límite es independiente del método de subdivisión si ϕ es continua en V.

Al formar la suma (1) sobre todos los cubos posibles en la región, es aconsejable proceder de manera ordenada. Una posibilidad es primero agregar todos los términos de (1) que correspondan a los elementos de volumen contenidos en una columna como PQ en la figura. Esto implica mantener fijas a x_k y a y_k y sumar sobre todas las z_k. A continuación se mantiene fija a x_k pero se suma sobre todas las y_k. Esto requiere sumar todas las columnas PQ contenidas en una banda RS y, en consecuencia, implica sumar todos los cubos contenidos en dicha rebanada. Por último, se varía x_k. Esto quiere decir que se suman todas las rebanadas como RS.

En el proceso descrito, primero se toma la suma sobre las z_k, después sobre las y_k y por último sobre las x_k. Sin embargo, es evidente que la suma puede efectuarse en cualquier orden.

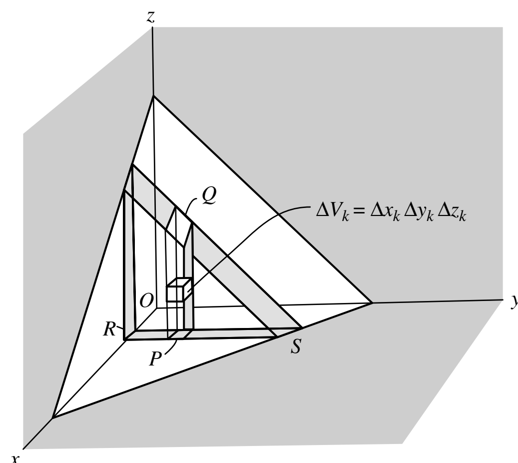


Figura 5-12

b) Las ideas involucradas en el método de la suma ilustrado en el inciso *a*) se pueden usar para evaluar la integral. Si se mantiene a x y y constantes, se integra de $z = 0$ (base de la columna PQ) a $z = 8 - 4x - 2y$ (parte superior de la columna PQ). A continuación se mantiene constante a x y se integra con respecto de y. Esto implica sumar las columnas que tienen su base en el plano xy ($z = 0$) localizadas en cualquier parte de R (donde $y = 0$) a S (donde $4x + 2y = 8$, o $y = 4 - 2x$), y la integración es de $y = 0$ a $y = 4 - 2x$. Por último, se suman todas las rebanadas paralelas al plano yz, que implica integrar de $x = 0$ a $x = 2$. La integración se escribe así:

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x}\int_{z=0}^{8-4x-2y} 45x^2y\,dz\,dy\,dx = 45\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x} x^2y(8-4x-2y)\,dy\,dx$$

$$= 45\int_{x=0}^{2} \frac{1}{3}x^2(4-2x)^3\,dx = 128$$

Nota: El resultado puede interpretarse físicamente como la masa de la región V en la cual la densidad ϕ varía de acuerdo con la fórmula $\phi = 45x^2y$.

5.26. Sea $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. Evalúe $\iiint_V \mathbf{F}\, dV$ donde V es la región limitada por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = x^2$ y $z = 4$, como se ilustra en la figura 5-13.

Solución

La región V queda cubierta *a*) manteniendo fijas a x y y e integrando de $z = x^2$ a $z = 4$ (de la base a la parte superior de la columna PQ, *b*) después se mantiene fija a x y se integra de $y = 0$ a $y = 6$ (R a S se encuentra en la banda), *c*) finalmente se integra de $x = 0$ a $x = 2$ (donde $z = x^2$ interseca a $z = 4$). Así, la integral requerida es

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} (2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k})\, dz\, dy\, dx$$

$$= \mathbf{i}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 2xz\, dz\, dy\, dx - \mathbf{j}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 x\, dz\, dy\, dx + \mathbf{k}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 y^2\, dz\, dy\, dx = 128\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 384\mathbf{k}$$

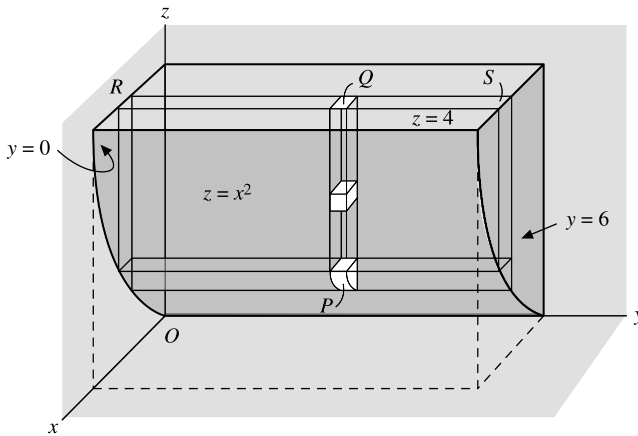


Figura 5-13

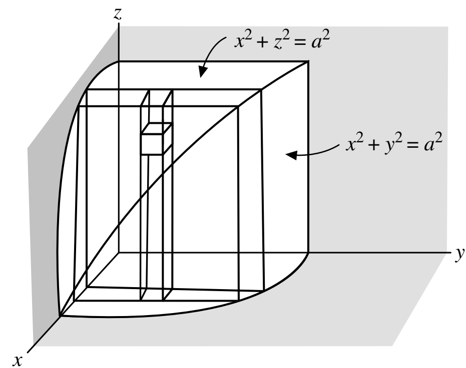


Figura 5-14

5.27. Calcule el volumen de la región común a los cilindros que se intersecan, $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

Solución

El volumen requerido = 8 veces el volumen de la región ilustrada en la figura 5-14.

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\, dy\, dx$$

$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\, dy\, dx = 8\int_{x=0}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{16a^3}{3}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.28. Suponga que $\mathbf{R}(t) = (3t^2 - t)\mathbf{i} + (2 - 6t)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$. Encuentre *a*) $\int \mathbf{R}(t)\, dt$ y *b*) $\int_2^4 \mathbf{R}(t)\, dt$.

5.29. Evalúe $\int_0^{\pi/2} (3 \operatorname{sen} u\mathbf{i} + 2\cos u\mathbf{j})\, du$.

5.30. Sea $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$ y $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$. Evalúe *a*) $\int_0^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\, dt$ y *b*) $\int_0^2 \mathbf{A}\times\mathbf{B}\, dt$.

5.31. Sea $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Evalúe *a*) $\int_1^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}\, dt$ y *b*) $\int_1^2 \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\, dt$.

5.32. La aceleración, **a**, de una partícula en cualquier momento $t \geq 0$, está dada por $\mathbf{a} = e^{-t}\,\mathbf{i} - 6(t+1)\mathbf{j} + 3 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$. Si la velocidad, **v**, y el desplazamiento, **r**, son iguales a cero en $t = 0$, obtenga **v** y **r** en cualquier momento.

5.33. La aceleración **a** de un objeto en cualquier momento t está dada por $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$, donde g es una constante. En $t = 0$, la velocidad está dada por $\mathbf{v} = v_o \cos \theta_o \mathbf{i} + v_o \operatorname{sen} \theta_o \mathbf{j}$, y el desplazamiento es $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Encuentre **v** y **r** en cualquier momento $t > 0$. Esto describe el movimiento de un proyectil disparado por un cañón inclinado un ángulo θ_o respecto del eje positivo de las x, con velocidad inicial de magnitud v_o.

5.34. Suponga que $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{A}(3) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Evalúe $\int_2^3 \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{A}/dt)\, dt$.

5.35. Encuentre la velocidad superficial de una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = a \cos \omega t\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, donde a, b y ω son constantes y t es el tiempo.

5.36. Demuestre que los cuadrados de los periodos de los planetas en su movimiento alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus trayectorias elípticas (tercera ley de Kepler).

5.37. Sea $\mathbf{A} = (2y + 3)\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$. Evalúe $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de las trayectorias siguientes C:

a) $x = 2t^2$, $y = t$ y $z = t^3$, de $t = 0$ a $t = 1$,

b) las líneas rectas de (0, 0, 0) a (0, 0, 1), después a (0, 1, 1) y luego a (2, 1, 1),

c) la línea recta que une a (0, 0, 0) y (2, 1, 1).

5.38. Suponga que $\mathbf{F} = (5xy - 6x^2)\mathbf{i} + (2y - 4x)\mathbf{j}$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C en el plano xy, $y = x^3$, del punto (1, 1) al punto (2, 8).

5.39. Sea $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (3y - x)\mathbf{j}$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde C es la curva en el plano xy que consiste en las líneas rectas de (0, 0) a (2, 0), y después a (3, 2).

5.40. Encuentre el trabajo realizado cuando una partícula se mueve en el campo de fuerzas $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a lo largo de:

a) la línea recta de (0, 0, 0) a (2, 1, 3).

b) la curva en el espacio $x = 2t^2$, $y = t$ y $z = 4t^2 - t$ de $t = 0$ a $t = 1$.

c) la curva definida por $x^2 = 4y$ y $3x^3 = 8z$, de $x = 0$ a $x = 2$.

5.41. Evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ y C es la curva cerrada en el plano xy, $x = 2 \cos t$ y $y = 3 \operatorname{sen} t$, de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

5.42. Suponga que **T** es un vector unitario tangente a la curva C, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Demuestre que el trabajo realizado cuando se mueve una partícula en un campo de fuerzas **F** a lo largo de C, está dado por $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, donde s es la longitud de arco.

5.43. Sea $\mathbf{F} = (2x + y^2)\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j}$. Evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor del triángulo C de la figura 5-15 *a*) en la dirección indicada y *b*) opuesto a la dirección que se indica.

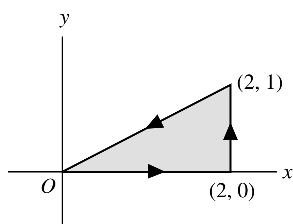


Figura 5-15

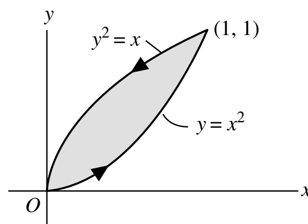


Figura 5-16

5.44. Sea $\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$. Evalúe $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor de la curva cerrada C de la figura 5-16.

5.45. Sea $\mathbf{A} = (y - 2x)\mathbf{i} + (3x + 2y)\mathbf{j}$. Calcule la circulación de $\mathbf{A}$ sobre una circunferencia C en el plano xy con centro en el origen y radio igual a 2, si C se recorre en la dirección positiva.

5.46. *a*) Suponga que $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$. Demuestre que $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la curva C que une a dos puntos dados. *b*) Demuestre que hay una función diferenciable ϕ tal que $\mathbf{A} = \nabla\phi$, y encuéntrela.

5.47. *a*) Demuestre que $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas conservativo.

b) Calcule el potencial escalar para $\mathbf{F}$.

c) Determine el trabajo realizado cuando un objeto se mueve en este campo, de $(0, 1, -1)$ a $(\pi/2, -1, 2)$.

5.48. Demuestre que $\mathbf{F} = r^2\mathbf{r}$ es conservativo y calcule su potencial escalar.

5.49. Determine si el campo de fuerzas $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (2z - x^2)\mathbf{k}$ es conservativo o no conservativo.

5.50. Demuestre que el trabajo realizado sobre una partícula al moverla de A a B es igual a su cambio en energía cinética en dichos puntos, sea o no conservativo el campo de fuerzas.

5.51. Dado $\mathbf{A} = (yz + 2x)\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$. Evalúe $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 1$, en la dirección positiva de $(0, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$.

5.52. *a*) Sea $\mathbf{E} = r\mathbf{r}_4$. ¿Existe una función ϕ tal que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$? Si es así, encuéntrela. *b*) Evalúe $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, si C es cualquier curva cerrada simple.

5.53. Demuestre que $(2x \cos y + z \operatorname{sen} y)\, dx + (xz \cos y - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy + x \operatorname{sen} y\, dz$ es una diferencial exacta. Con base en lo anterior resuelva la ecuación diferencial $(2x \cos y + z \operatorname{sen} y)\, dx + (xz \cos y - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy + x \operatorname{sen} y\, dz = 0$.

5.54. Resuelva *a*) $(e^{-y} + 3x^2y^2)\, dx + (2x^3y - xe^{-y})\, dy = 0$,

b) $(z - e^{-x} \operatorname{sen} y)\, dx + (1 + e^{-x} \cos y)\, dy + (x - 8z)\, dz = 0$.

5.55. Dada $\phi = 2xy^2z + x^2y$, evalúe $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$, donde C

a) es la curva $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$, de $t = 0$ a $t = 1$,

b) consiste en líneas rectas que van de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, después a $(1, 1, 0)$ y luego a $(1, 1, 1)$.

5.56. Sea $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $z = 2 \cos t$, de $t = 0$ a $t = \pi/2$.

5.57. Suponga que $\mathbf{A} = (3x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (y - 2)\mathbf{k}$ y que $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Evalúe $\oint_C (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times d\mathbf{r}$ alrededor de la circunferencia situada en el plano xy, con centro en el origen, y con radio igual a 2 que se recorre en la dirección positiva.

5.58. Evalúe $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ para cada uno de los casos siguientes.

a) $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y S es la superficie del plano $2x + y = 6$, en el primer octante, cortado por el plano $z = 4$.

b) $\mathbf{A} = (x + y^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ y S es la superficie del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante.

5.59. Suponga que $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro parabólico $y^2 = 8x$, en el primer octante limitado por los planos $y = 4$ y $z = 6$. Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

5.60. Suponga que $\mathbf{A} = 6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre toda la superficie S de la región limitada por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $y = 8$.

5.61. Evalúe $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre: *a*) la superficie S del cubo unitario acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$; *b*) la superficie de una esfera de radio a y con su centro en (0, 0, 0).

5.62. Suponga que $\mathbf{A} = 4xz\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre toda la superficie de la región por arriba del plano xy acotada por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

5.63. *a*) Sea R la proyección de una superficie S sobre el plano xy. Demuestre que su área de S está dada por $\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$ si la ecuación para S es $z = f(x, y)$.

b) ¿Cuál es el área de la superficie si S tiene la ecuación $F(x, y, z) = 0$?

5.64. Encuentre el área de la superficie del plano $x + 2y + 2z = 12$ cortado por *a*) $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$; *b*) $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 16$.

5.65. Calcule la superficie de la región común a los cilindros que se intersecan $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

5.66. Evalúe *a*) $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ y *b*) $\iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$, si $\mathbf{F} = (x + 2y)\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $\phi = 4x + 3y - 2z$, y S es la superficie de $2x + y + 2z = 6$ limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 2$.

5.67. Resuelva el problema anterior si S es la superficie de $2x + y + 2z = 6$ limitada por $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

5.68. Evalúe $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ sobre la región R en el plano xy limitado por $x^2 + y^2 = 36$.

5.69. Evalúe $\iiint_V (2x + y)\, dV$, donde V es la región cerrada acotada por el cilindro $z = 4 - x^2$, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ y $z = 0$.

5.70. Suponga que $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$. Evalúe *a*) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ y *b*) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV$, donde V es la región cerrada limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.28. *a*) $(t^3 - t^2/2)\mathbf{i} + (2t - 3t^2)\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}$ y *b*) $50\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

5.29. $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

5.30. *a*) 12, *b*) $-24\mathbf{i} - \frac{40}{3}\mathbf{j} + \frac{65}{5}\mathbf{k}$

5.31. *a*) 0, *b*) $-\frac{87}{2}\mathbf{i} - \frac{44}{3}\mathbf{j} + \frac{15}{2}\mathbf{k}$

5.32. $\mathbf{v} = (1 - e^{-t})\mathbf{i} - (3t^2 + 6t)\mathbf{j} + (3 - 3\cos t)\mathbf{k}$,
$\mathbf{r} = (t - 1 + e^{-t})\mathbf{i} - (t^3 + 3t^2)\mathbf{j} + (3t - 3\,\mathrm{sen}\, t)\mathbf{k}$

5.33. $\mathbf{v} = v_o \cos\theta_o \mathbf{i} + (v_o\,\mathrm{sen}\,\theta_o - gt)\mathbf{j}$,
$\mathbf{r} = (v_o\cos\theta_o)t\mathbf{i} + [(v_o\,\mathrm{sen}\,\theta_o)t - \frac{1}{2}gt^2]\mathbf{j}$

5.34. 10

5.35. $\frac{1}{2}ab\omega\mathbf{k}$

5.37. *a*) 288/35, *b*) 10, *c*) 8

5.38. 35

5.39. 11

5.40. *a*) 16, *b*) 14.2 y *c*) 16

5.41. 6π, si C se recorre en la dirección positiva (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

5.43. *a*) $-14/3$ y *b*) $14/3$

5.44. 2/3

5.45. 8π

5.46. *b*) $\phi = 2x^2y - x^3z^2 +$ constante

5.47. *b*) $\phi = y^2\,\mathrm{sen}\, x + xz^3 - 4y + 2z +$ constante, *c*) $15 + 4\pi$

5.48. $\phi = \frac{r^4}{4} +$ constante

5.49. no conservativo

5.51. 1

5.52. *a*) $\phi = -\frac{r^3}{3} +$ constante, *b*) 0

5.53. $x^2 \cos y + xz \operatorname{sen} y = \text{constante}$

5.54. *a*) $xe^{-y} + x^3y^2 = \text{constante}$ y
b) $xz + e^{-x} \operatorname{sen} y + y - 4z^2 = \text{constante}$

5.55. *a*) $\dfrac{19}{45}\mathbf{i} + \dfrac{11}{15}\mathbf{j} + \dfrac{75}{77}\mathbf{k}$, *b*) $\dfrac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5.56. $\left(2 - \dfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \left(\pi - \dfrac{1}{2}\right)\mathbf{j}$

5.57. $4\pi(7\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

5.58. *a*) 108 y *b*) 81

5.59. 132

5.60. 18π

5.61. *a*) 3 y *b*) $4\pi a^3$

5.62. 320π

5.63. $$\iint_R \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right)^2}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right|}\, dx\, dy$$

5.64. *a*) 3/2 y *b*) 6π

5.65. $16a^2$

5.66. *a*) 1, *b*) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5.67. *a*) 9/2, *b*) $72\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 72\mathbf{k}$

5.68. 144π

5.69. 80/3

5.70. *a*) $\dfrac{8}{3}$ y *b*) $\dfrac{8}{3}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$

CAPÍTULO 6

El teorema de la divergencia, el teorema de Stokes y otros teoremas de integración

6.1 INTRODUCCIÓN

El cálculo elemental afirma que el valor de la integral definida de una función continua, $f(x)$, en un intervalo cerrado, $[a, b]$, se obtiene de la antiderivada de la función evaluada en los extremos a y b (frontera) del intervalo.

Se da una situación análoga en el plano y el espacio. Es decir, existe una relación entre una integral doble sobre ciertas regiones R en el plano, y una integral de línea sobre la frontera de la región R. De manera similar, hay una relación entre la integral de volumen sobre ciertos volúmenes V en el espacio y la integral doble sobre la superficie de la frontera de V.

En este capítulo se estudian éstos y otros teoremas.

6.2 TEOREMAS PRINCIPALES

Se aplican los teoremas siguientes:

TEOREMA 6.1 **(Teorema de la divergencia de Gauss)** Suponga que V es el volumen limitado por una superficie cerrada S y que $\mathbf{A}$ es una función vectorial de posición con derivadas continuas. Entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\; dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint\!\!\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal positiva (dirigida hacia fuera) a S.

TEOREMA 6.2 **(Teorema de Stokes)** Suponga que S es una superficie abierta, de dos lados, limitada por una curva C cerrada que no se interseca a sí misma (curva simple cerrada), y suponga que $\mathbf{A}$ es una función vectorial de posición con derivadas continuas. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

donde C se recorre en la dirección positiva.

La *dirección* de C se llama *positiva* si un observador que caminara sobre la frontera de S en esa dirección, con su cabeza vuelta hacia la dirección de la normal positiva a S, tuviera la superficie a su izquierda.

TEOREMA 6.3 **(Teorema de Green en el plano)** Suponga que R es una región cerrada en el plano xy, limitada por una curva simple cerrada, C, y que M y N son funciones continuas de x y y que tienen derivadas continuas en R. Entonces

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde C se recorre en la dirección positiva (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

A menos que se diga otra cosa, siempre supondremos que $\oint$ significa que la integral está descrita en el sentido positivo.

El teorema de Green en el plano es un caso especial del teorema de Stokes (vea el problema 6.4). Asimismo, es de interés observar que el teorema de la divergencia de Gauss es una generalización del teorema de Green en el plano, en el cual la región (plano) R y su frontera cerrada (curva) C son sustituidas por una región (en el espacio) V y su frontera (superficie) cerrada S. Por esta razón, el teorema de la divergencia con frecuencia recibe el nombre de *teorema de Green en el espacio* (vea el problema 6.4).

El teorema de Green en el plano también se cumple para regiones limitadas por un número finito de curvas simples cerradas que no se intersecan (vea los problemas 6.10 y 6.11).

6.3 TEOREMAS INTEGRALES RELACIONADOS

Se aplican las proposiciones siguientes.

PROPOSICIÓN 6.4: Se cumplen las leyes que siguen:

i) $$\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)]\,dV = \iint_S (\phi\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S}$$

Ésta se llama *primera identidad o teorema de Green.*

ii) $$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

Ésta se denomina *segunda identidad, o teorema asimétrico de Green.* Consulte el problema 6.21.

iii) $$\iiint_V \nabla\times\mathbf{A}\,dV = \iint_S (\mathbf{n}\times\mathbf{A})\,dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\mathbf{A}$$

Note que aquí el producto punto del teorema de la divergencia de Gauss es reemplazado por el producto cruz (vea el problema 6.23).

iv) $$\oint_C \phi\,d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n}\times\nabla\phi)\,dS = \iint_S d\mathbf{S}\times\nabla\phi$$

PROPOSICIÓN 6.5: Sea que ψ representa ya sea una función vectorial o escalar, según si el símbolo $\circ$ denota un producto punto o un producto cruz, o una multiplicación ordinaria. Entonces,

i) $$\iiint_V \nabla\circ\psi\,dV = \iint_S \mathbf{n}\circ\psi\,dS = \iint_S d\mathbf{S}\circ\psi$$

$$ii) \quad \oint_C d\mathbf{r} \circ \psi = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \circ \psi \, dS = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \circ \psi$$

El teorema de la divergencia de Gauss, el de Stokes y las proposiciones 6.4, *iii*) y *iv*), son casos especiales de estos resultados (vea los problemas 6.22, 6.23 y 6.34).

Forma integral del operador ∇

Es de interés que, con la terminología del problema 6.19, el operador ∇ se exprese en forma simbólica como sigue:

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

donde ∘ denota un producto punto, un producto cruz o una multiplicación (vea el problema 6.25). El resultado es de utilidad para ampliar los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional a sistemas coordenados distintos del rectangular (vea los problemas 6.19 y 6.24, y el capítulo 7).

PROBLEMAS RESUELTOS

Teorema de Green en el plano

6.1. Demuestre el teorema de Green en el plano, donde C es una curva cerrada que tiene la propiedad de que cualquier línea recta paralela a los ejes coordenados corta a C en dos puntos como máximo.

Solución

Sean las ecuaciones de las curvas AEB y AFB (vea la figura 6-1) $y = Y_1(x)$ y $y = Y_2(x)$, respectivamente. Si R es la región acotada por C, tenemos lo siguiente:

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} \, dx \, dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} \, dy \right] dx = \int_{x=a}^{b} M(x, y) \Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_a^b [M(x, Y_2) - M(x, Y_1)] \, dx$$

$$= -\int_a^b M(x, Y_1) \, dx - \int_b^a M(x, Y_2) \, dx = -\oint_C M \, dx$$

Entonces,

$$\oint_C M \, dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} \, dx \, dy \qquad (1)$$

De manera similar, sean las ecuaciones de las curvas EAF y EBF: $x = X_1(y)$ y $x = X_2(y)$, respectivamente. Entonces,

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} \, dx \, dy = \int_{y=e}^{f} \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} \, dx \right] dy = \int_e^f [N(X_2, y) - N(X_1, y)] \, dy$$

$$= \int_f^e N(X_1, y) \, dy + \int_e^f N(X_2, y) \, dy = \oint_C N \, dy$$

Así,

$$\oint_C N \, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} \, dx \, dy \qquad (2)$$

Se suman (1) y (2) y resulta:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

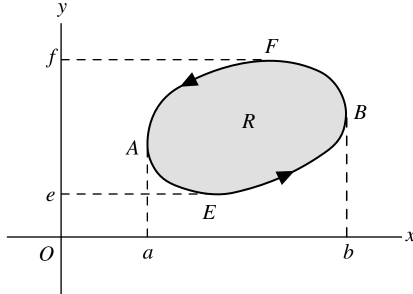


Figura 6-1

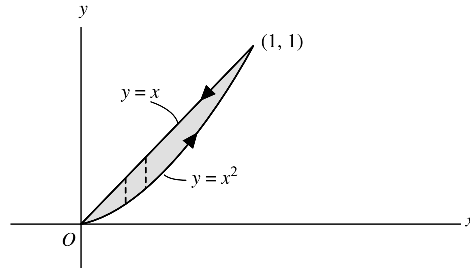


Figura 6-2

6.2. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$, donde C es la curva cerrada de la región limitada por $y = x$ y $y = x^2$ (vea la figura 6-2).

Solución

En la figura 6-2 se aprecia que $y = x$ y $y = x^2$ se intersecan en (0, 0) y (1, 1), y también la dirección positiva en que se recorre C.

A lo largo de $y = x^2$, la integral de línea es igual a:

$$\int_0^1 \left[(x)(x^2) + x^4\right] dx + (x^2)(2x)\,dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4)\,dx = \frac{19}{20}$$

A lo largo de $y = x$, de (1, 1) a (0, 0), la integral de línea es igual a:

$$\int_1^0 [(x)(x) + x^2]\,dx + x^2\,dx = \int_1^0 3x^2\,dx = -1$$

Entonces, la integral de línea requerida $= \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$.

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (x - 2y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (x - 2y)\,dy\right] dx = \int_0^1 (xy - y^2)\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - x^3)\,dx = -\frac{1}{20}$$

con lo que se verifica el teorema.

6.3. Amplíe la prueba del teorema de Green en el plano dado en el problema 6.1, a las curvas C para las cuales hay líneas rectas paralelas a los ejes coordenados que pueden cortar a C en más de dos puntos.

Solución

Considere una curva cerrada C como la que se aprecia en la figura 6-3, en la que rectas paralelas a los ejes cortan a C en más de dos puntos. Al construir la recta ST la región queda dividida en dos regiones (R_1 y R_2), que son del tipo considerado en el problema 6.1 y para el cual se aplica el teorema de Green, es decir,

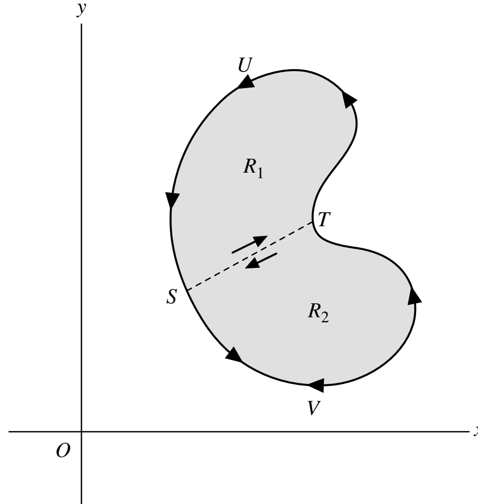


Figura 6-3

$$\int_{STUS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1}$$

$$\int_{SVTS} M\,dx + N\,dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{2}$$

Al sumar los lados izquierdo y derecho de (1) y (2), con la omisión del integrando $M\,dx + N\,dy$ en cada caso, se obtiene lo siguiente,

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

y con el hecho de que

$$\int_{ST} = -\int_{TS}$$

Al sumar los lados derechos de (1) y (2), con la omisión del integrando,

$$\iint_{R_1} + \iint_{R_2} = \iint_{R}$$

donde R consiste en las regiones R_1 y R_2. Entonces,

$$\int_{TUSVT} M\,dx + N\,dy = \iint_{R} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

con lo que se demuestra el teorema.

Una región R como la considerada aquí y en el problema 6.1, para la que cualquier curva cerrada que se localice en R puede ser reducida continuamente a un punto sin salir de R, se llama *región de conexión simple* (o *simplemente conexa*). Una región que no sea de conexión simple se denomina de *conexión múltiple*. Se ha demostrado aquí que el teorema de Green en el plano se aplica a regiones de conexión simple limitadas por curvas cerradas. En el problema 6.10, el teorema se extiende a regiones de conexión múltiple.

Para regiones más complicadas que las de conexión simple puede ser necesario construir más rectas, tales como ST, a fin de establecer el teorema.

6.4. Exprese el teorema de Green en el plano con notación vectorial.

Solución

Tenemos que $M\,dx + N\,dy = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, por lo que $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$.

Asimismo, si $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

por lo que $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$.

Entonces, el teorema de Green en el plano puede escribirse:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k}\, dR$$

donde $dR = dx\,dy$.

Una generalización de éste a superficies S en el espacio que tienen una curva C como frontera, conduce de manera natural al *teorema de Stokes*, lo que se prueba en el problema 6.31.

Otro método

Como antes, $M\,dx + N\,dy = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r}/ds)\,ds = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\,ds$, donde $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ = vector tangente unitario a C (vea la figura 6-4). Si $\mathbf{n}$ va hacia fuera de la normal unitaria a C, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$, por lo que

$$M\,dx + N\,dy = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\,ds = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n})\,ds = (\mathbf{A} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\,ds$$

Como $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{k} = (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ y $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y) = \nabla \cdot \mathbf{B}$. Entonces, el teorema de Green en el plano se convierte en:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{B}\,dR$$

donde $dR = dx\,dy$.

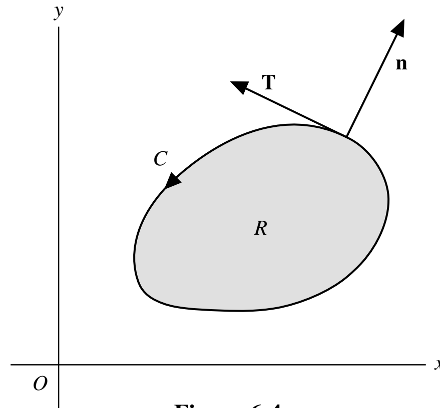


Figura 6-4

La generalización de éste al caso en que la diferencial de arco de longitud, ds, de una curva cerrada C es reemplazada por la diferencial de área, dS, de una superficie cerrada, S, y la región del plano correspondiente, R, encerrada por C, es sustituida por el volumen V encerrado por S, lleva al *teorema de la divergencia de Gauss*, o *teorema de Green en el espacio*.

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV$$

6.5. Interprete físicamente el primer resultado del problema 6.4.

Solución

Si $\mathbf{A}$ denota el campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, entonces $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ es el trabajo realizado cuando la partícula se mueve alrededor de una trayectoria cerrada C, y se determina por medio del valor de $\nabla \times \mathbf{A}$. Se concluye, en particular, que si $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, o, de manera equivalente, si $\mathbf{A} = \nabla\phi$, entonces la integral alrededor de una trayectoria cerrada es igual a cero. Esto quiere decir que el trabajo efectuado al mover la partícula de un punto del plano a otro es independiente de la trayectoria que los une o que el campo de fuerzas es conservativo. Estos resultados ya se demostraron para campos de fuerzas y curvas en el espacio (vea el capítulo 5).

A la inversa, si la integral es independiente de la trayectoria que une dos puntos cualesquiera de una región, es decir: si la integral alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero, entonces $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. En el plano, la condición $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ es equivalente a la condición $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, donde $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$.

6.6. Evalúe $\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy$ a lo largo de la trayectoria $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

Solución

La evaluación directa es difícil. Sin embargo, note que $M = 10x^4 - 2xy^3$, $N = -3x^2y^2$ y que $\partial M/\partial y = -6xy^2 = \partial N/\partial x$, de lo que se concluye que la integral es independiente de la trayectoria. Entonces, puede usarse cualquier trayectoria, por ejemplo la que consiste en segmentos de rectas que van de (0, 0) a (2, 0) y luego de (2, 0) a (2, 1).

A lo largo de la trayectoria recta que va de (0, 0) a (2, 0), $y = 0$, $dy = 0$, y la integral es igual a $\int_{x=0}^{2} 10x^4\, dx = 64$.

Para la trayectoria recta que une a (2, 0) con (2, 1), $x = 2$, $dx = 0$, y la integral es igual a $\int_{y=0}^{1} -12y^2\, dy = -4$.

Así, el valor requerido de la integral de línea es $= 64 - 4 = 60$.

Otro método

Como $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, $(10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy$ es una diferencial exacta (de $2x^5 - x^2y^3$). Entonces,

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3)\, dx - 3x^2y^2\, dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(2x^5 - x^2y^3) = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60$$

6.7. Demuestre que el área limitada por una curva cerrada simple C está dada por $\frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$.

Solución

En el teorema de Green, sea $M = -y$ y $N = x$. Entonces,

$$\oint_C x\, dy - y\, dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dx\, dy = 2\iint_R dx\, dy = 2A$$

donde A es el área requerida. Así, $A = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx$.

6.8. Calcule el área de la elipse $x = a\cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$.

Solución

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta - (b\operatorname{sen}\theta)(-a\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab$$

6.9. Evalúe $\oint_C (y - \operatorname{sen} x)\,dx + \cos x\,dy$, donde C es el triángulo que se ilustra en la figura 6-5, *a*) directamente, y *b*) con el empleo del teorema de Green en el plano.

Solución

a) A lo largo de OA, $y = 0$, $dy = 0$, y la integral es igual a:

$$\int_0^{\pi/2}(0 - \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x)(0) = \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen} x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi/2} = -1$$

A lo largo de AB, $x = \pi/2$, $dx = 0$, y la integral es:

$$\int_0^1 (y-1)0 + 0\,dy = 0$$

A lo largo de BO, $y = 2x/\pi$, $dy = (2/\pi)\,dx$, y la integral es:

$$\int_{\pi/2}^0 \left(\frac{2x}{\pi} - \operatorname{sen} x\right)dx + \frac{2}{\pi}\cos x\,dx = \left(\frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} x\right)\Bigg|_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

Entonces, la integral a lo largo de $C = -1 + 0 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$.

b) $M = y - \operatorname{sen} x$, $N = \cos x$, $\partial N/\partial x = -\operatorname{sen} x$, $\partial M/\partial y = 1$, y

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_R (-\operatorname{sen} x - 1)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2}\left[\int_{y=0}^{2x/\pi}(-\operatorname{sen} x - 1)\,dy\right]dx = \int_{x=0}^{\pi/2}(-y\operatorname{sen} x - y)\Bigg|_0^{2x/\pi} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{2x}{\pi}\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi}\right)dx = -\frac{2}{\pi}(-x\cos x + \operatorname{sen} x) - \frac{x^2}{\pi}\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

de acuerdo con el inciso *a*).

Observe que si bien existen rectas paralelas a los ejes coordenados (en este caso coinciden con éstos), que cruzan a C en un número *infinito* de puntos, se cumple el teorema de Green en el plano. En general, el teorema es válido cuando C está compuesto por un número finito de segmentos de recta.

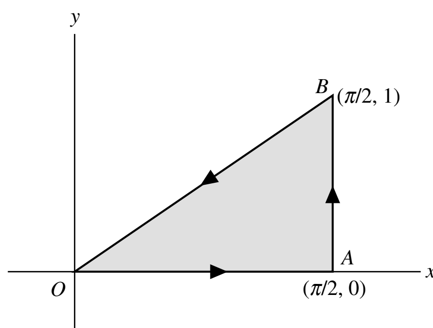


Figura 6-5

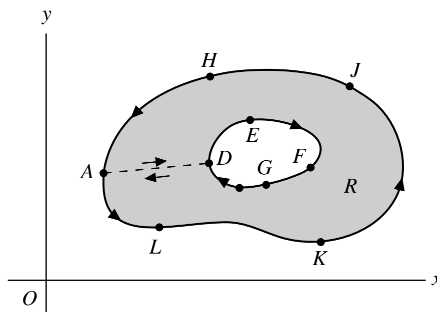


Figura 6-6

6.10. Demuestre que el teorema de Green en el plano también es válido para una región con conexión múltiple R, como la que se muestra en la figura 6-6.

Solución

La región sombreada, R, que aparece en la figura 6-6, tiene conexión múltiple porque no toda curva cerrada en R puede ser colapsada a un punto sin salir de R, como se observa si se considera una curva que rodee *DEFGD*, por ejemplo. La frontera de R que consiste en la frontera exterior *AHJKLA* y la frontera interior *DEFGD*, va a recorrerse en la dirección positiva, de modo que una persona que vaya en esta dirección siempre tenga a su izquierda a la región. Las direcciones positivas son las que se indican en la figura 6-6.

A fin de establecer el teorema, construya una línea, como *AD*, llamada *corte transversal*, que conecte las fronteras exterior e interior. La región acotada por *ADEFGDALKJHA* tiene conexión simple, por lo que es válido el teorema de Green. Entonces,

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Pero la integral del lado izquierdo, omitiendo el integrando, es igual a:

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

ya que $\int_{AD} = -\int_{DA}$. Entonces, si C_1 es la curva *ALKJHA*, C_2 es la curva *DEFGD*, y C es la frontera de R que consiste en C_1 y C_2 (recorridas en las direcciones positivas), entonces $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C$, por lo que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

6.11. Demuestre que el teorema de Green en el plano se cumple para la región R, de la figura 6-7, acotada por las curvas cerradas simples $C_1(ABDEFGA)$, $C_2(HKLPH)$, $C_3(QSTUQ)$ y $C_4(VWXYV)$.

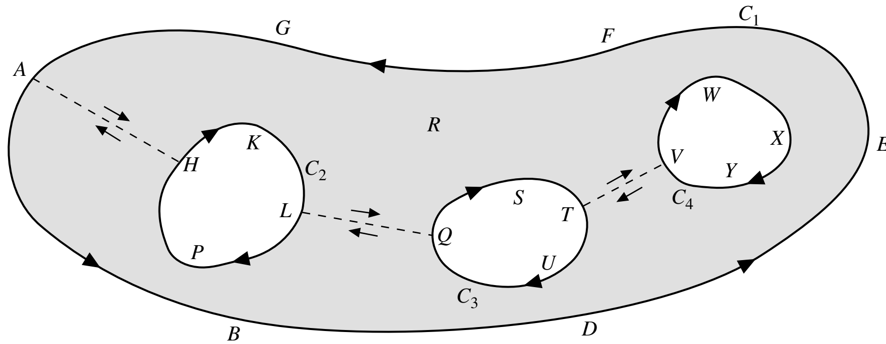


Figura 6-7

Solución

Construya los cortes transversales AH, LQ y TV. Entonces, la región limitada por $AHKLQSTVWXYVTUQLPHA$-$BDEFGA$, tiene conexión simple, por lo que se aplica el teorema de Green. La integral sobre esta frontera es igual a

$$\int_{AH} + \int_{HKL} + \int_{LQ} + \int_{QST} + \int_{TV} + \int_{VWXYV} + \int_{VT} + \int_{TUQ} + \int_{QL} + \int_{LPH} + \int_{HA} + \int_{ABDEFGA}$$

Debido a que las integrales a lo largo de AH y HA, LQ y QL, y TV y VT, se cancelan por parejas, el resultado anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}
&\int_{HKL} + \int_{QST} + \int_{VWXYV} + \int_{TUQ} + \int_{LPH} + \int_{ABDEFGA} \\
&= \left(\int_{HKL} + \int_{LPH}\right) + \left(\int_{QST} + \int_{TUQ}\right) + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA} \\
&= \int_{HKLPH} + \int_{QSTUQ} + \int_{VWXYV} + \int_{ABDEFGA} \\
&= \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1} = \int_{C}
\end{aligned}$$

donde C es la frontera que consiste en C_1, C_2, C_3 y C_4. De modo que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

como se requería.

6.12. Considere una curva cerrada C en una región de conexión simple. Demuestre que $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$ si y sólo si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, en cualquier lugar de la región.

Solución

Suponga que M y N son continuas y tienen derivadas parciales continuas en cualquier sitio de la región R limitada por C, de modo que sea aplicable el teorema de Green. Entonces,

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ en R, entonces es evidente que $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$.

A la inversa, suponga que $\oint_C M\,dx + N\,dy = 0$ para todas las curvas C. Si $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y) > 0$ en un punto P, entonces, por la continuidad de las derivadas, se concluye que $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y) > 0$ en cierta región A que rodea a P. Si Γ es la frontera de A, entonces

$$\oint_\Gamma M\,dx + N\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$$

lo que contradice la suposición de que la integral de línea es igual a cero alrededor de toda curva cerrada. De manera similar, la suposición de que $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y) < 0$ lleva a una contradicción. Entonces, $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y) = 0$ en todos los puntos.

Note que la condición $(\partial M/\partial y) = (\partial N/\partial x)$ es equivalente a la condición $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{A} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ (vea los problemas 5.10 y 5.11). Para la generalización a curvas en el espacio, consulte el problema 6.31.

6.13. Sea $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}/(x^2 + y^2)$. *a*) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$. *b*) Evalúe $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada y explique los resultados.

Solución

a) $$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$, en cualquier región que excluya (0, 0).

b) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$. Sea $x = \rho\cos\phi$ y $y = \rho \operatorname{sen}\phi$, donde (ρ, ϕ) son coordenadas polares. Entonces,

$$dx = -\rho \operatorname{sen}\phi\,d\phi + d\rho\cos\phi \quad \text{y} \quad dy = \rho\cos\phi\,d\phi + d\rho \operatorname{sen}\phi$$

por lo que

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = d\phi = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

Para una curva cerrada $ABCDA$ (consulte la figura 6-8*a*) que rodea al origen, $\phi = 0$ en A, y $\phi = 2\pi$ después de una vuelta completa por A. En este caso, la integral de línea es igual a $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$.

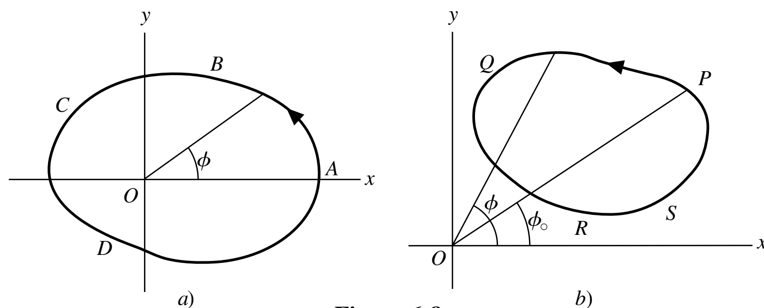


Figura 6-8

Para una curva cerrada *PQRSP* (vea la figura 6-8*b*) que no rodea al origen, $\phi = \phi_o$ en P, y $\phi = \phi_o$ después de dar una vuelta completa hasta P. En este caso, la integral de línea es igual a $\int_{\phi_o}^{\phi_o} d\phi = 0$.

Como $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ es equivalente a $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ y el resultado parecería contradecir a los obtenidos en el problema 6.12. Sin embargo, no existe contradicción debido a que $M = -y/(x^2 + y^2)$ y $N = x/(x^2 + y^2)$ no tienen derivadas continuas en ninguna región que incluya (0, 0), y esto fue lo que se supuso en el problema 6.12.

El teorema de divergencia

6.14. *a*) Exprese el teorema de divergencia en palabras y *b*) escríbalo en forma rectangular.

Solución

a) La integral de superficie de la componente normal de un vector **A** tomado sobre una superficie cerrada, es igual a la integral de la divergencia de **A** tomada sobre el volumen encerrado por la superficie.

b) Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Entonces, div $\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \dfrac{\partial A_1}{\partial x} + \dfrac{\partial A_2}{\partial y} + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}$.

La normal unitaria a S es $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$. Por tanto, $n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \cos\alpha$, $n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = \cos\beta$, y $n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \cos\gamma$, donde α, β y γ son los ángulos que forman **n** con la parte positiva de los ejes x, y y z, que son las direcciones **i**, **j** y **k**, respectivamente. Las cantidades $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de **n**. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) \\ &= A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma\end{aligned}$$

y el teorema de la divergencia se escribe así:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma)\,dS$$

6.15. Demuestre físicamente el teorema de divergencia.

Solución

Sea $\mathbf{A}$ = velocidad **v** en cualquier punto de un fluido en movimiento. De la figura 6.9*a*) tenemos que:

$$\begin{aligned}&\text{Volumen del fluido que cruza } dS \text{ en } \Delta t \text{ segundos} \\ &\quad = \text{volumen contenido en un cilindro de base } dS \text{ y altura } \mathbf{v}\Delta t \\ &\quad = (\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n}\,dS = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,dS\,\Delta t\end{aligned}$$

Entonces, el volumen de fluido que atraviesa a dS en cada segundo $= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,dS$

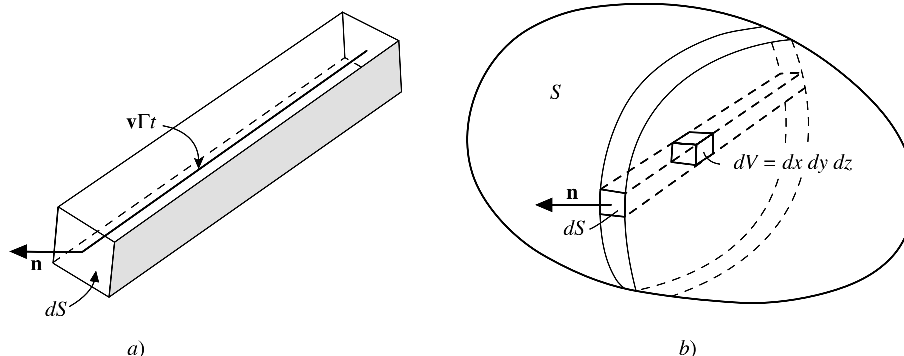


Figura 6-9

De la figura 6-9*b*) tenemos que:

$$\text{Volumen total de fluido que emerge por segundo de la superficie cerrada } S = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Del problema 4.21 del capítulo 4, $\nabla \cdot \mathbf{v}\, dV$ es el volumen por segundo de fluido que emerge de un elemento de volumen dV. Entonces,

$$\text{Volumen total de fluido que emerge por segundo de todos los elementos de volumen en } S = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV$$

Con lo que:

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV$$

6.16. Demuestre el teorema de divergencia.

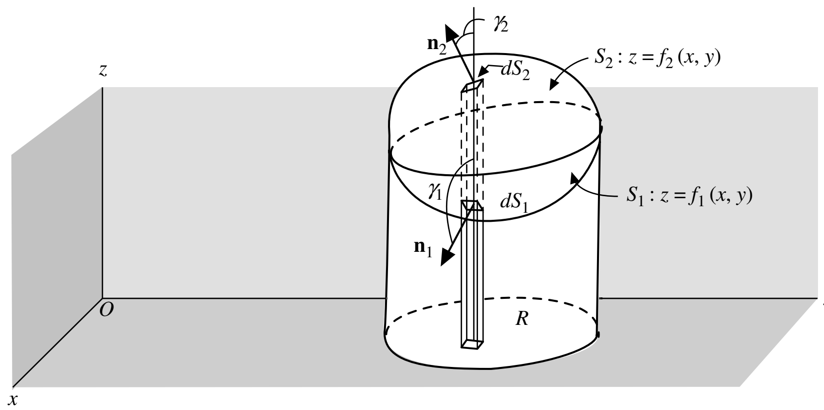


Figura 6-10

Solución

Sea S una superficie cerrada tal que cualquier recta paralela a los ejes coordenados corta a S en, máximo, dos puntos. Suponga que las ecuaciones de las partes inferior y superior, S_1 y S_2, sean $z = f_1(x, y)$ y $z = f_2(x, y)$, respectivamente. Se denota con R la proyección de la superficie en el plano xy (vea la figura 6-10). Considere que:

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dV &= \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz\, dy\, dx = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dz \right] dy\, dx \\ &= \iint_R A_3(x, y, z)\Big|_{z=f_1}^{f_2} dy\, dx = \iint_R [A_3(x, y, f_2) - A_3(x, y, f_1)]\, dy\, dx\end{aligned}$$

Para la parte superior S_2, $dy\, dx = \cos \gamma_2 dS_2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2\, dS_2$, porque la normal $\mathbf{n}_2$ a S_2 forma un ángulo agudo γ_2 con $\mathbf{k}$.

Para la parte inferior S_1, $dy\, dx = -\cos \gamma_1 dS_1 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1\, dS_1$, porque la normal $\mathbf{n}_1$ a S_1 forma un ángulo obtuso γ_1 con $\mathbf{k}$.

Entonces,

$$\iint_R A_3(x, y, f_2)\, dy\, dx = \iint_{S_2} A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2\, dS_2$$

$$\iint_R A_3(x, y, f_1)\, dy\, dx = -\iint_{S_1} A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1\, dS_1$$

y

$$\begin{aligned}\iint_R A_3(x, y, f_2)\, dy\, dx - \iint_R A_3(x, y, f_1)\, dy\, dx &= \iint_{S_2} A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2\, dS_2 + \iint_{S_1} A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1\, dS_1 \\ &= \iint_S A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS\end{aligned}$$

por lo que

$$\iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} dV = \iint_S A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad (1)$$

De manera similar, al proyectar S sobre los otros planos coordenados,

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad (2)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad (3)$$

Al sumar las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o bien:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

El teorema puede extenderse a superficies en que las rectas paralelas a los ejes coordenados las cruzan en más de dos puntos. Para establecer dicha extensión, se subdivide la región acotada por S en subregiones cuyas superficies satisfagan esta condición. El procedimiento es análogo al que se empleó en el teorema de Green para el plano.

6.17. Evalúe $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$, y S es la superficie del cubo limitado por $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ y $z = 1$.

Solución

Por el teorema de divergencia, la integral pedida es igual a:

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right] dV$$

$$= \iiint_V (4z - y)\,dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} (4z - y)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 2z^2 - yz\Big|_{z=0}^{1} dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (2 - y)\,dy\,dx = \frac{3}{2}$$

La integral de superficie también puede evaluarse en forma directa, como en el problema 5.23.

6.18. Verifique el teorema de divergencia para $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ tomada sobre la región limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $z = 3$.

Solución

$$\text{Integral de volumen} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\;dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dV$$

$$= \iiint_V (4 - 4y + 2z)\,dV = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{3} (4 - 4y + 2z)\;dz\;dy\;dx = 84\pi$$

La superficie S del cilindro consiste en una base, S_1 ($z = 0$), la parte superior, S_2 ($z = 3$), y la parte convexa S_3 ($x^2 + y^2 = 4$). Entonces,

$$\text{Integral de superficie} = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\;dS_3$$

Sobre S_1 ($z = 0$), $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j}$ y $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 0$, de modo que $\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\;dS_1 = 0$

Sobre S_2 ($z = 3$), $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $\mathbf{A} = 4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = 9$, por lo que

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS_2 = 9\iint_{S_2} dS_2 = 36\pi, \qquad \text{ya que el área de } S_2 = 4\pi$$

Sobre S_3 ($x^2 + y^2 = 4$). Una perpendicular a $x^2 + y^2 = 4$ tiene la dirección $\nabla(x^2 + y^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$.

Entonces, una normal unitaria es $\mathbf{n} = \dfrac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}$, ya que $x^2 + y^2 = 4$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}\right) = 2x^2 - y^3$$

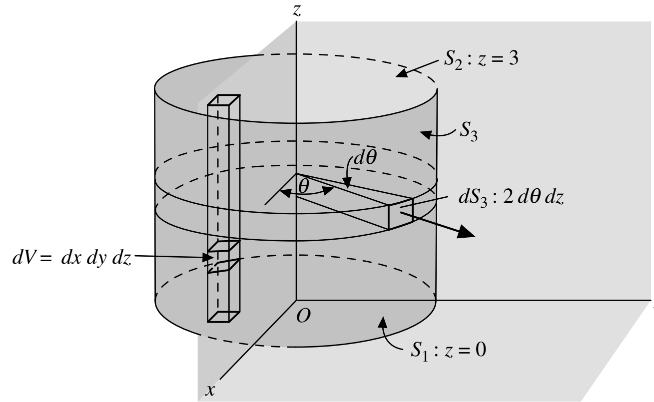


Figura 6-11

De la figura 6-11, $x = 2\cos\theta$, $y = 2 \text{ sen } \theta$, $dS_3 = 2\,d\theta\,dz$, y así:

$$\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_3 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{3} [2(2 \cos \theta)^2 - (2 \text{ sen } \theta)^3] 2\,dz\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (48 \cos^2 \theta - 48 \text{ sen}^3 \theta) d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 48 \cos^2 \theta\,d\theta = 48\pi$$

Entonces, la integral de superficie $= 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$, lo que concuerda con la integral de volumen y verifica el teorema de divergencia.

Observe que la evaluación de la integral de superficie sobre S_3 también hubiera podido hacerse con la proyección de S_3 sobre los planos coordenados xz o yz.

6.19. Suponiendo que div **A** denota la divergencia de un campo vectorial **A** en el punto P. Demuestre que

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

donde ΔV es el volumen encerrado por la superficie ΔS y el límite se obtiene al colapsar ΔV al punto P.

Solución

Por el teorema de divergencia,

$$\iiint_{\Delta V} \text{div}\,\mathbf{A}\,dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\,dS$$

Por el teorema del valor medio para las integrales, el lado izquierdo puede escribirse como sigue:

$$\overline{\text{div}\,\mathbf{A}} \iiint_{\Delta V} dV = \overline{\text{div}\,\mathbf{A}}\,\Delta V$$

donde $\overline{\text{div}\,\mathbf{A}}$ es algún valor intermedio entre el máximo y el mínimo de div **A** a través de ΔV. Entonces,

$$\overline{\text{div}\,\mathbf{A}} = \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

Si se obtiene el límite cuando $\Delta V \to 0$ en forma tal que P siempre sea interior a ΔV, $\overline{\text{div}\,\mathbf{A}}$ tiende al valor div **A** en el punto P; por tanto

$$\text{div}\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

Este resultado puede tomarse como un punto de inicio para definir la divergencia de **A**, y de él es posible obtener todas las propiedades, incluso la prueba del teorema de divergencia. En el capítulo 7 se usará esta definición para ampliar el concepto de divergencia de un vector para sistemas coordenados diferentes del rectangular. Físicamente:

$$\frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS}{\Delta V}$$

representa el flujo o flujo neto de salida por unidad de volumen del vector **A** desde la superficie ΔS. Si div **A** es positiva en la vecindad de un punto P, significa que el flujo de salida desde P es positivo y llamamos a éste una *fuente*. De manera similar, si div **A** es negativo en la vecindad de P, el flujo es de entrada y P recibe el nombre de *sumidero*. Si en una región no existen fuentes ni sumideros, entonces div $\mathbf{A} = 0$ y **A** se denomina campo vectorial *solenoidal*.

6.20. Evalúe $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde S es una superficie cerrada.

Solución

Por el teorema de divergencia,

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = 3\iiint_V dV = 3V$$

donde V es el volumen encerrado por S.

6.21. Demuestre que $\displaystyle\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

Sea $\mathbf{A} = \phi\nabla\psi$ en el teorema de divergencia. Entonces,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi\nabla\psi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\phi\nabla\psi) \cdot d\mathbf{S}$$

Pero

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = \phi(\nabla \cdot \nabla\psi) + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)$$

Entonces,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi\nabla\psi)\, dV = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)]\, dV$$

o bien:

$$\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)]\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi) \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

lo que demuestra la *primera identidad de Green*. Al intercambiar en la ecuación (1) ϕ y ψ,

$$\iiint_V [\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\phi)]\, dV = \iint_S (\psi\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} \tag{2}$$

Al restar la ecuación (2) de la (1) queda:

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} \tag{3}$$

que es la *segunda identidad de Green* o *teorema simétrico*. En la demostración supusimos que ϕ y ψ eran funciones escalares de posición con derivadas continuas de al menos segundo orden.

6.22. Demuestre que $\displaystyle\iiint_V \nabla\phi\ dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$.

Solución

En el teorema de divergencia, sea $\mathbf{A} = \phi\mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un vector constante. Entonces,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi\mathbf{C})\, dV = \iint_S \phi\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como $\nabla \cdot (\phi\mathbf{C}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \nabla\phi$ y $\phi\mathbf{C} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{C}(\phi\mathbf{n})$,

$$\iiint_V \mathbf{C} \cdot \nabla\phi\ dV = \iint_S \mathbf{C} \cdot (\phi\mathbf{n})\, dS$$

Se saca $\mathbf{C}$ de las integrales,

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla\phi\ dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$$

y como $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario,

$$\iiint_V \nabla\phi\ dV = \iint_S \phi\mathbf{n}\, dS$$

6.23. Demuestre que $\displaystyle\iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\ dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$.

Solución

En el teorema de divergencia, sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un vector constante. Entonces,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\ dV = \iint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}\ dS$$

Como $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ y $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B})$,

$$\iiint_V \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV = \iint_S \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B})\, dS$$

Se saca a $\mathbf{C}$ de las integrales,

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\ dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$$

y como $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario, queda:

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\ dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$$

6.24. Demuestre que en cualquier punto P

$$a)\ \nabla\phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n}\, dS}{\Delta V} \quad \text{y que} \quad b)\ \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS}{\Delta V}$$

donde ΔV es el volumen encerrado por la superficie ΔS, y el límite se obtiene al colapsar ΔV al punto P.

Solución

a) Del problema 6.22, $\iiint_{\Delta V} \nabla\phi\, dV = \iint_{\Delta S} \phi\mathbf{n}\, dS$. Entonces, $\iiint_{\Delta V} \nabla\phi \cdot \mathbf{i}\, dV = \iint_{\Delta S} \phi\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, dS$. Por el mismo principio empleado en el problema 6.19, tenemos que

$$\overline{\nabla\phi \cdot \mathbf{i}} = \frac{\iint_{\Delta S} \phi\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, dS}{\Delta V}$$

donde $\overline{\nabla\phi \cdot \mathbf{i}}$ es algún valor intermedio entre el máximo y el mínimo de $\nabla\phi \cdot \mathbf{i}$ a través de ΔV. Al obtener el límite cuando $\Delta V \to 0$ de modo que P sea siempre interior a ΔV, entonces $\nabla\phi \cdot \mathbf{i}$ tiende al valor

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{S} \phi\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, dS}{\Delta V} \tag{1}$$

De manera similar, encontramos que:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{S} \phi\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\, dS}{\Delta V} \tag{2}$$

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{S} \phi\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, dS}{\Delta V} \tag{3}$$

Al multiplicar (1), (2) y (3) por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente, y sumar, con el empleo de:

$$\nabla\phi = (\nabla\phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla\phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

(vea el problema 2.17) se llega al resultado.

b) Del problema 6.23, al sustituir $\mathbf{B}$ por $\mathbf{A}$, $\iiint_{\Delta V} \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$. Entonces, igual que en el inciso *a*), es posible demostrar que:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i}\, dS}{\Delta V}$$

y llegar a resultados similares con $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ reemplazando a $\mathbf{i}$. Al multiplicar por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, y sumar, se llega al resultado.

Los resultados obtenidos se toman como puntos de inicio para la definición del gradiente y rotacional. Con el empleo de dichas definiciones se amplían los conceptos a sistemas de coordenadas que no sean rectangulares.

6.25. Establezca la equivalencia del operador

$$\nabla \circ \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ$$

donde $\circ$ indica un producto punto, un producto cruz o un producto ordinario.

Solución

Para establecer la equivalencia, los resultados de la operación sobre un campo vectorial o escalar deben ser consistentes con los resultados ya obtenidos.

Si $\circ$ es el producto punto, entonces para un vector $\mathbf{A}$,

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \mathbf{A}$$

o bien:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

establecidas en el problema 6.19.

De manera similar, si $\circ$ es el producto cruz,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, dS$$

establecida en el problema 6.24*b*).

Asimismo, si $\circ$ es una multiplicación común, entonces, para un escalar ϕ,

$$\nabla \circ \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} d\mathbf{S} \circ \phi \quad \text{o bien} \quad \nabla \phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \phi\, d\mathbf{S}$$

establecida en el problema 6.24*a*).

6.26. Sea S una superficie cerrada, y sea que $\mathbf{r}$ denote al vector de posición de cualquier punto (x, y, z) medido desde un origen O. Demuestre que

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$$

es igual a *a*) cero, si O está fuera de S o *b*) 4π, si O queda dentro de S. Este resultado se conoce como *teorema de Gauss.*

Solución

a) Por el teorema de divergencia,

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, dV$$

Pero $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ (problema 4.19) en todo lugar dentro de V siempre que $r \neq 0$ en V, es decir siempre que O quede fuera de V y por tanto fuera de S. Entonces,

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = 0$$

b) Si O está dentro de S, se rodea a O con una pequeña esfera s de radio a. Sea que τ denote la región acotada por S y s. Entonces, según el teorema de divergencia:

$$\iint_{S+s} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS + \iint_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_\tau \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV = 0$$

ya que $r \neq 0$ en τ. Así,

$$\iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS$$

Ahora sobre s, $r = a$, $\mathbf{n} = -\dfrac{\mathbf{r}}{a}$, de modo que $\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \dfrac{(-\mathbf{r}/a)\cdot\mathbf{r}}{a^3} = -\dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4} = -\dfrac{a^2}{a^4} = -\dfrac{1}{a^2}$ y

$$\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = -\iint_s \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = \iint_s \frac{1}{a^2}\,dS = \frac{1}{a^2}\iint_s dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

6.27. Interprete el teorema de Gauss (vea el problema 6.26) desde el punto de vista geométrico.

Solución

Sea que dS denote un elemento de superficie y conecte todos los puntos sobre la frontera de dS a O (consulte la figura 6-12), con lo que se formaría un cono. Sea que $d\Omega$ denote el área de una porción de esfera con centro en O y radio igual a r que es cortada por el cono; entonces, el *ángulo sólido* subtendido por dS en O se define como $d\omega = d\Omega/r^2$ y es numéricamente igual al área de esa porción de esfera con centro en O y radio unitario cortado por el cono. Sea $\mathbf{n}$ la normal a dS unitaria positiva, y llamemos θ al ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$; entonces, $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r$. Asimismo,

$$d\Omega = \pm dS\cos\theta = \pm(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r)\,dS, \text{ por lo que } d\omega = \pm(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS,$$

el signo $+$ o el $-$ se escoge según sea que $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$ formen un ángulo θ agudo u obtuso.

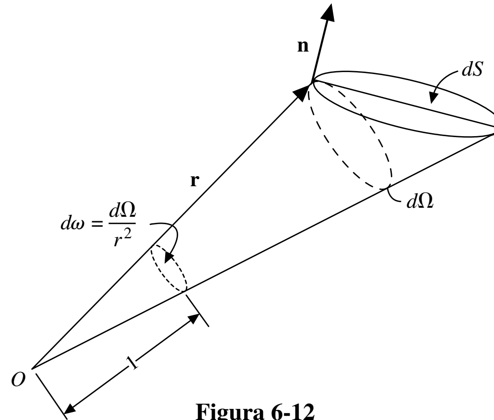


Figura 6-12

Sea S una superficie, como la de la figura 6-13*a*), de modo que cualquier recta la corte en no más de dos puntos. Si O queda fuera de S, entonces en una posición como la señalada con 1, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = d\omega$; mientras que en la posición marcada con 2, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = -d\omega$. Una integración sobre estas dos regiones da cero, ya que las contribuciones al ángulo sólido se cancelan. Cuando la integración se realiza sobre S se concluye que $\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = 0$, ya que por cada contribución positiva existe una negativa.

Sin embargo, en el caso en que O está dentro de S, entonces en la posición indicada con 3, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = d\omega$, y en la posición 4, $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = d\omega$, de modo que las contribuciones se suman en vez de cancelarse. El ángulo sólido total en este caso es igual al área de una esfera unitaria, que es 4π, por lo que $\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/r^3)\,dS = 4\pi$.

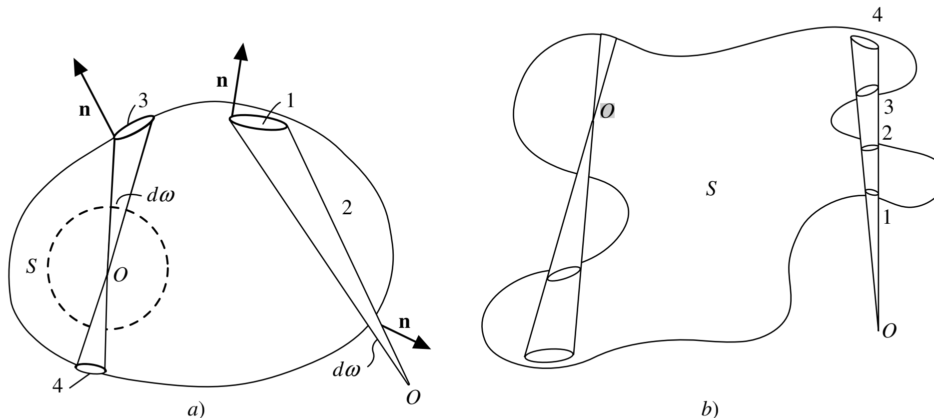


Figura 6-13

Para superficies S tales que una recta corte a S en más de dos puntos, tenemos una situación exactamente igual a la ilustrada en la figura 6-13. Si O queda fuera de S, por ejemplo, entonces un cono con vértice en O interseca a S en un número par de sitios y la contribución a la integral de superficie es igual a cero, ya que los ángulos sólidos subtendidos en O se cancelan por parejas. Sin embargo, si O está dentro de S, un cono con vértice en O interseca a S en un número impar de lugares y como hay cancelación sólo para un número par de ellos, siempre habrá una contribución 4π para toda la superficie S.

6.28. Un fluido cuya densidad es $\rho(x, y, z, t)$ se mueve con velocidad $\mathbf{v}(x, y, z, t)$. Si no existen fuentes ni sumideros, demuestre que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$.

Solución

Considere una superficie arbitraria que encierra un volumen V del fluido. En cualquier momento, la masa de fluido dentro de V es

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

La tasa de incremento de esta masa con respecto del tiempo es

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

La masa de fluido por unidad de tiempo que sale de V es

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(vea el problema 6.15) y por tanto, la tasa de incremento de la masa con respecto del tiempo es

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

por el teorema de divergencia. Entonces,

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

o bien

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

Como V es arbitraria, el integrando, que se supone continuo, debe ser idéntico a cero, con un razonamiento similar al utilizado en el problema 6.12. Entonces,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. La ecuación se llama *de continuidad*. Si ρ es una constante, el fluido es incompresible y $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir, $\mathbf{v}$ es solenoidal.

La ecuación de continuidad también aparece en la teoría electromagnética, donde ρ es la *densidad de carga* y $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ es la *densidad de corriente*.

6.29. Si la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de un sólido en el momento t es $U(x, y, z, t)$, y si κ, ρ y c son, respectivamente, la conductividad térmica, densidad y calor específico del sólido, que se suponen constantes, demuestre que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\nabla^2 U$$

donde $k = \kappa/\rho c$.

Solución

Sea V un volumen arbitrario en el interior del sólido, y sea S su superficie. El flujo total de calor a través de S, o cantidad de calor que sale de S por unidad de tiempo, es

$$\iint_S (-\kappa\nabla U) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Así, la cantidad de calor que entra a S por unidad de tiempo es

$$\iint_S (\kappa\nabla U) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\kappa\nabla U)\, dV \tag{1}$$

por el teorema de divergencia. El calor contenido en un volumen V está dado por

$$\iiint_V c\rho U\, dV$$

Entonces, la tasa de incremento del calor con respecto del tiempo es

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V c\rho U\, dV = \iiint_V c\rho\,\frac{\partial U}{\partial t}\, dV \tag{2}$$

Se igualan los lados derechos de las ecuaciones (1) y (2), y queda:

$$\iiint_V \left[c\rho\,\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa\nabla U)\right] dV = 0$$

y como V es arbitrario, el integrando, que se supuso continuo, debe ser igual a cero, por lo que

$$c\rho\,\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa\nabla U)$$

o, si κ, c y ρ son constantes,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\nabla \cdot \nabla U = k\nabla^2 U$$

La cantidad k se llama *difusividad*. Para un flujo de calor de estado estable (es decir, cuando $\partial U/\partial t = 0$, o cuando U es independiente del tiempo), la ecuación se reduce a la de Laplace, $\nabla^2 U = 0$.

Teorema de Stokes

6.30. *a*) Exprese el teorema de Stokes con palabras, y *b*) escríbalo en forma rectangular.

Solución

a) La integral de línea de la componente tangencial de un vector **A** tomada alrededor de una curva simple cerrada, C, es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de **A** tomado sobre cualquier superficie, S, que tenga a C como su frontera.

b) Como en el problema 6.14*b*),

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Entonces,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

y el teorema de Stokes se convierte en:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS = \oint_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz$$

6.31. Demuestre el teorema de Stokes.

Solución

Sea S una superficie tal que sus proyecciones sobre los planos xy, yz y xz, sean regiones limitadas por curvas simples y cerradas, como se ilustra en la figura 6-14. Suponga que S tiene la representación $z = f(x, y)$ o $x = g(y, z)$ o $y = h(x, z)$, donde f, g y h son funciones valuadas en un solo valor, continuas y diferenciables, respectivamente. Debemos demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})] \cdot \mathbf{n}\,dS$$

$$= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C es la frontera de S.

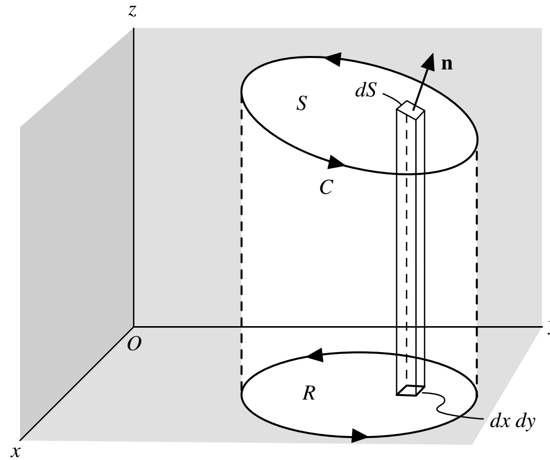


Figura 6-14

Primero considere $\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\,dS$. Ya que

$$\nabla \times (A_1\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k}$$

entonces,

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\right) dS \qquad (1)$$

Si $z = f(x, y)$ se toma como la ecuación de S, entonces el vector de posición de cualquier punto de S es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$, de modo que $\partial\mathbf{r}/\partial y = \mathbf{j} + (\partial z/\partial y)\mathbf{k} = \mathbf{j} + (\partial f/\partial y)\mathbf{k}$. Pero $\partial\mathbf{r}/\partial y$ es un vector tangente a S (vea el problema 3.25) y por tanto perpendicular a $\mathbf{n}$, de modo que

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$$

Se sustituye en (1) para obtener

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\right) dS = \left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\right) dS$$

o bien

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, dS = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, dS \qquad (2)$$

Ahora sobre S, $A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y)$; por lo cual $\dfrac{\partial A_1}{\partial y} + \dfrac{\partial A_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, y la ecuación (2) se convierte en:

$$[\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, dS = -\frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy$$

Entonces,

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R -\frac{\partial F}{\partial y}\, dx\, dy$$

donde R es la proyección de S sobre el plano xy. Según el teorema de Green para el plano, la última integral es igual a $\oint_\Gamma F\, dx$, donde Γ es la frontera de R. Como en cada punto (x, y) de Γ el valor de F es el mismo que el valor de A_1 en cada punto (x, y, z) de C, y como dx es la misma para ambas curvas, se debe tener que:

$$\oint_\Gamma F\, dx = \oint_C A_1\, dx$$

o bien

$$\iint_S [\nabla \times (A_1\mathbf{i})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C A_1\, dx$$

En forma similar, por proyecciones sobre los otros planos coordenados,

$$\iint_S [\nabla \times (A_2\mathbf{j})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C A_2\, dy \quad \text{y} \quad \iint_S [\nabla \times (A_3\mathbf{k})] \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C A_3\, dz$$

Así, por adición,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

El teorema también es válido para superficies S que quizá no satisfagan las restricciones impuestas mencionadas. En particular, supongamos que S se subdivide en superficies $S_1, S_2, \ldots, S_k$ con fronteras $C_1, C_2, \ldots, C_k$, que satisfacen las restricciones. Entonces, el teorema de Stokes se cumple para cada superficie. Al sumar estas integrales de superficie, se obtiene la integral de superficie total sobre S. Al sumar las correspondientes integrales de línea sobre $C_1, C_2, \ldots, C_k$, se obtiene la integral de línea sobre C.

6.32. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$, donde S es la mitad superior de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y C es su frontera. Sea R la proyección de S sobre el plano xy.

Solución

La frontera C de S es una circunferencia en el plano xy de radio igual a 1 y centro en el origen. Las ecuaciones paramétricas de C son $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $z = 0$, $0 \leq t < 2\pi$. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (2x - y)\, dx - yz^2\, dy - y^2z\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\, dt = \pi$$

Asimismo,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

Entonces,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R dx\, dy$$

ya que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\, dS = dx\, dy$ y R es la proyección de S sobre el plano xy. Esta última integral es igual a:

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi$$

y se verifica el teorema de Stokes.

6.33. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ en toda curva cerrada C, es que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ en forma idéntica.

Solución

Suficiencia. Supongamos que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Entonces, según el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Necesidad. Supongamos que $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ alrededor de toda trayectoria cerrada, C, y supongamos que $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ en cierto punto P. Entonces, si se supone que $\nabla \times \mathbf{A}$ es continuo, habrá una región que tenga a P como un punto interior, donde $\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Sea S una superficie contenida en esta región y cuya normal $\mathbf{n}$ en cada punto tiene la misma dirección que $\nabla \times \mathbf{A}$, es decir, donde $\nabla \times \mathbf{A} = \alpha\mathbf{n}$, donde α es una constante positiva. Sea C la frontera de S. Entonces, por el teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \alpha \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}\, dS > 0$$

lo que contradice la hipótesis de que $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ y demuestra que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Se concluye que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ también es una condición necesaria y suficiente para que una integral de línea $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ sea independiente de la trayectoria que une los puntos P_1 y P_2 (vea los problemas 5.10 y 5.11).

6.34. Demuestre que $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}\, dS$.

Solución

En el teorema de Stokes, sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un vector constante. Entonces,

$$\oint d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\oint \mathbf{C} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\mathbf{C} \cdot \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n}\, dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S \mathbf{C} \cdot [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})]\, dS - \iint_S \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})]\, dS$$

$$= \mathbf{C} \cdot \iint_S [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})]\, dS = \mathbf{C} \cdot \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}\, dS$$

Ya que $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}\, dS$.

6.35. Suponga que ΔS es una superficie acotada por una curva cerrada simple, C, y que P es cualquier punto de ΔS que no está sobre C, y que $\mathbf{n}$ es una normal unitaria a ΔS en P. Demuestre que en P:

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

donde el límite se toma en forma tal que ΔS se colapse a P.

Solución

De acuerdo con el teorema de Stokes, $\iint_{\Delta S} (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Con el empleo del teorema del valor medio para integrales, como en los problemas 6.19 y 6.24, esto puede escribirse como sigue:

$$\overline{(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

y el resultado requerido se deduce al calcular el límite cuando $\Delta S \to 0$.

Esto puede utilizarse como el punto inicial para definir rot $\mathbf{A}$ (vea el problema 6.36) y es útil en la obtención de rot $\mathbf{A}$ en sistemas de coordenadas que no sean rectangulares. Como $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ recibe el nombre de circulación de $\mathbf{A}$ sobre C, la componente normal del rotacional puede interpretarse físicamente como el límite de la circulación por unidad de área, lo que hace que rotación de $\mathbf{A}$ sea un sinónimo (rot $\mathbf{A}$) en lugar de rotacional de $\mathbf{A}$.

6.36. Suponga que rot $\mathbf{A}$ se define de acuerdo con el proceso al límite descrito en el problema 6.35. Encuentre la componente de z del rotacional de $\mathbf{A}$.

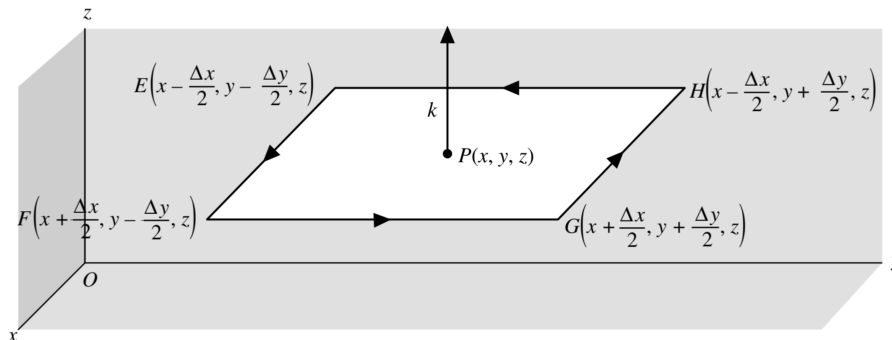


Figura 6-15

Sea $EFGH$ un rectángulo paralelo al plano xy con un punto interior $P(x, y, z)$ tomado como su punto medio, según se ilustra en la figura 6-15. Sean A_1 y A_2 las componentes de $\mathbf{A}$ en P en las direcciones positivas de x y y, respectivamente.

Si C es la frontera del rectángulo, entonces

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{EF} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{FG} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{GH} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{HE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Pero,

$$\int_{EF} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(A_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \int_{GH} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\left(A_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\int_{FG} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(A_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \qquad \int_{HE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\left(A_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

excepto para infinitésimos de orden mayor que $\Delta x\, \Delta y$.

Al sumar se obtiene aproximadamente:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\Delta x\, \Delta y$$

Entonces, como $\Delta S = \Delta x\, \Delta y$,

$$\begin{aligned}\text{componente } z \text{ de rot } \mathbf{A} = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} &= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\Delta x\, \Delta y}{\Delta x\, \Delta y} \\ &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\end{aligned}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.37. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$, donde C es la frontera de la región definida por *a)* $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$; *b)* $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

6.38. Evalúe $\oint_C (3x + 4y)\, dx + (2x - 3y)\, dy$, donde C es una circunferencia de radio igual a dos, con centro en el origen del plano xy y que se recorre en sentido positivo.

6.39. Resuelva el problema anterior para la integral de línea $\oint_C (x^2 + y^2)\, dx + 3xy^2\, dy$.

6.40. Evalúe $\oint (x^2 - 2xy)\, dx + (x^2y + 3)\, dy$ alrededor de la frontera de la región definida por $y^2 = 8x$ y $x = 2$, *a)* directamente y *b)* con el empleo del teorema de Green.

6.41. Evalúe $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy - y^2)\, dx + (3x^2 - 2xy)\, dy$ a lo largo de la cicloide $x = \theta - \text{sen}\ \theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

6.42. Evalúe $\oint (3x^2 + 2y)\, dx - (x + 3\cos y)\, dy$ alrededor del paralelogramo cuyos vértices están en (0, 0), (2, 0), (3, 1) y (1, 1).

6.43. Calcule el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \text{sen } \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $a > 0$, y el eje x.

6.44. Determine el área acotada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.
Sugerencia: Las ecuaciones paramétricas son $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \text{ sen}^3 \theta$.

6.45. Demuestre que en coordenadas polares (ρ, ϕ), se cumple la expresión $x\,dy - y\,dx = \rho^2\,d\phi$. Interprete $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

6.46. Encuentre el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $\rho = 3 \text{ sen } 2\phi$.

6.47. Calcule el área de los dos lazos de la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$.

6.48. Obtenga el área del lazo de la hoja de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ (vea la figura 6-16).

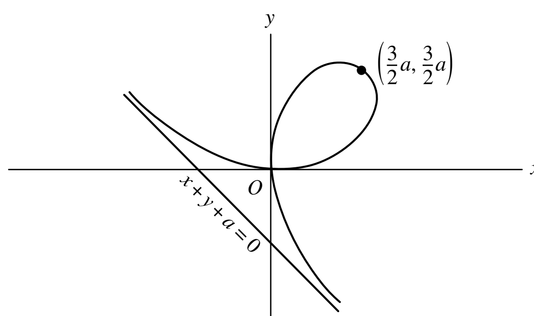


Figura 6-16

Sugerencia: Sea $y = tx$, y obtenga las ecuaciones paramétricas de la curva. Después utilice el hecho de que

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\oint x^2\,dt$$

6.49. Verifique el teorema de Green en el plano $\oint_C (2x - y^3)\,dx - xy\,dy$, donde C es la frontera de la región encerrada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

6.50. Evalúe $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$ a lo largo de las trayectorias siguientes:

a) Segmentos de línea recta que van de (1, 0) a (1, 1), luego a (−1, 1) y después a (−1, 0).
b) Segmentos de línea recta que van de (1, 0) a (1, −1), después a (−1, −1) y luego a (−1, 0).
Demuestre que, aun cuando $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ la integral de línea *es dependiente* a la trayectoria que une (1, 0) a (−1, 0) y explique.

6.51. Por cambio de variables de (x, y) a (u, v) y de acuerdo con la transformación $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, demuestre que el área A de la región R limitada por una curva simple cerrada, C, está dada por

$$A = \iint_R \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\,dv \quad \text{donde } J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de x y de y con respecto de u y v. ¿Qué restricciones establecería el lector? Ilustre el resultado donde u y v son coordenadas polares.
Sugerencia: Use el resultado $A = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$, transforme a coordenadas u y v, y luego utilice el teorema de Green.

6.52. Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y S es:

a) La superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.
b) La superficie de la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $x + 2z = 6$.

6.53. Verifique el teorema de divergencia para $\mathbf{A} = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$ tomado sobre la región en el primer octante limitado por $y^2 + z^2 = 9$ y $x = 2$.

6.54. Evalúe $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde *a*) S es la esfera de radio igual a 2 con centro en (0, 0, 0), *b*) S es la superficie del cubo limitado por $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$, $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ y *c*) S es la superficie limitada por el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ y el plano xy.

6.55. Suponga que S es cualquier superficie cerrada que encierre un volumen V, y $\mathbf{A} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$. Demuestre que $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = (a + b + c)V$.

6.56. Suponga que $\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}$. Demuestre que $\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ para cualquier superficie cerrada S.

6.57. Suponga que $\mathbf{n}$ es la normal unitaria que sale desde cualquier superficie cerrada de área S. Demuestre que $\iiint_V \text{div}\,\mathbf{n}\, dV = S$.

6.58. Demuestre que $\displaystyle\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\, dS$.

6.59. Demuestre que $\iint_S r^5\mathbf{n}\, dS = \iiint_V 5r^3\mathbf{r}\, dV$.

6.60. Demuestre que $\iint_S \mathbf{n}\, dS = \mathbf{0}$ para cualquier superficie cerrada S.

6.61. Demuestre que la segunda identidad de Green puede escribirse como

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV = \iint_S \left(\phi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\phi}{dn}\right) dS.$$

6.62. Demuestre que $\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \mathbf{0}$ para cualquier superficie cerrada S.

6.63. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (y - z + 2)\mathbf{i} + (yz + 4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, donde S es la superficie del cubo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$, sobre el plano xy.

6.64. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, donde S es la superficie de la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + y + 2z = 8$, que no está incluida en el plano xz.

6.65. Evalúe $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie de *a*) el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sobre el plano xy y *b*) el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano xy.

6.66. Sea $\mathbf{A} = 2yz\mathbf{i} - (x + 3y - 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$, incluidos en el primer octante.

6.67. Un vector $\mathbf{B}$ siempre es normal a una superficie cerrada S. Demuestre que $\iiint_V \text{rot}\,\mathbf{B}\, dV = \mathbf{0}$, donde V es la región limitada por S.

6.68. Sea $\displaystyle\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es cualquier superficie limitada por la curva C. Demuestre que $\displaystyle\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$.

6.69. Demuestre que $\oint_C \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi$.

6.70. Use la equivalencia de operadores del problema resuelto 6.25 para llegar a que: *a*) $\nabla\phi$, *b*) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y *c*) $\nabla \times \mathbf{A}$, en coordenadas rectangulares.

6.71. Haga la demostración de que $\iiint_V \nabla\phi \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \phi\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iiint_V \phi\nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$.

6.72. Sea **r** el vector de posición de cualquier punto en relación con un origen O. Suponga que ϕ tiene derivadas continuas de al menos segundo orden, y sea S una superficie cerrada que encierra un volumen V. Denote a ϕ en O por medio de ϕ_o. Demuestre que

$$\iint_S \left[\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot dS = \iiint_V \frac{\nabla^2\phi}{r}dV + \alpha$$

donde $\alpha = 0$ o $4\pi\phi_o$, según si O está fuera o dentro de S.

6.73. El potencial $\phi(P)$ en un punto $P(x, y, z)$ debido a un sistema de cargas (o masas) $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que tienen vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, con respecto de P, está dado por:

$$\phi = \sum_{m=1}^{n} \frac{q_m}{r_m}$$

Demuestre la *ley de Gauss*:

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

donde $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ es la intensidad de campo eléctrico, S es una superficie que encierra todas las cargas y $Q = \sum_{m=1}^{n} q_m$ es la carga total dentro de S.

6.74. Si una región V acotada por una superficie S tiene una distribución de carga (o masa) continua de densidad ρ, entonces el potencial $\phi(P)$ en un punto P está definido por

$$\phi = \iiint_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Haga suposiciones razonables y deduzca lo siguiente:

a) $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho\, dV$, donde $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

b) $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ (ecuación de Poisson) en todos los puntos P en los que existen cargas, y $\nabla^2\phi = 0$ (ecuación de Laplace) donde no hay cargas.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.37. *a*) valor común $= 3/2$, *b*) valor común $= 5/3$

6.38. -8π

6.39. 12π

6.40. $128/5$

6.41. $6\pi^2 - 4\pi$

6.42. -6

6.43. $3\pi a^2$

6.44. $3\pi a^2/8$

6.46. $9\pi/8$

6.47. a^2

6.48. $3a^2/2$

6.49. valor común $= 60\pi$

6.50. *a*) π, *b*) $-\pi$

6.52. *a*) 30, *b*) $351/2$

6.53. 180

6.54. *a*) 32π, *b*) 24, *c*) 24π

6.63. valor común $= -4$

6.64. valor común $= 32/3$

6.65. *a*) -16π, *b*) -4π

6.66. $-a^2(3\pi + 8a)/12$

CAPÍTULO 7

Coordenadas curvilíneas

7.1 INTRODUCCIÓN

El lector ya está familiarizado con el sistema de coordenadas rectangulares (x, y) y el de coordenadas polares (r, θ), en el plano. Los dos sistemas se relacionan por medio de las ecuaciones siguientes:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arc tan}\,(y/x)$$

Este capítulo trata con sistemas de coordenadas generales en el espacio.

7.2 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Supongamos que las coordenadas rectangulares de cualquier punto (x, y, z) en el espacio se expresan como funciones de (u_1, u_2, u_3). Por ejemplo:

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3) \quad \text{y} \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{1}$$

Suponga que las expresiones en (1) pueden resolverse para u_1, u_2 y u_3, en términos de x, y y z, es decir,

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z) \quad \text{y} \quad u_3 = u_3(x, y, z) \tag{2}$$

Se supone que las funciones expresadas en (1) y (2) tienen un solo valor y derivadas continuas de modo que la correspondencia entre (x, y, z) y (u_1, u_2, u_3) es única. En la práctica, esta suposición tal vez no se aplique en ciertos puntos y se requiera alguna consideración especial.

Dado un punto P con coordenadas rectangulares (x, y, z), es posible asociar a partir de (2) un conjunto único de coordenadas (u_1, u_2, u_3) llamadas *coordenadas curvilíneas* de P. Los conjuntos de ecuaciones (1) o (2) definen una *transformación de coordenadas*.

7.3 COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

Las superficies $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$, donde c_1, c_2 y c_3 son constantes, se llaman *superficies de coordenadas* y cada pareja de ellas se interseca en curvas llamadas curvas coordenadas o rectas coordenadas (vea la figura 7-1). Si las superficies de coordenadas se intersecan en ángulos rectos, el sistema de coordenadas curvilíneas se denomina

ortogonal. Las curvas coordenadas u_1, u_2 y u_3 de un sistema curvilíneo son análogas a los ejes coordenados x, y y z de un sistema rectangular.

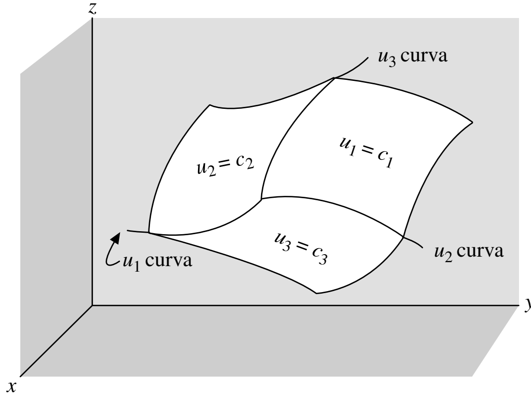


Figura 7-1

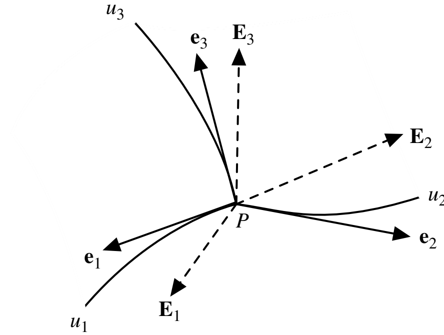


Figura 7-2

7.4 VECTORES UNITARIOS EN SISTEMAS CURVILÍNEOS

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de un punto P, en el espacio. Entonces, la expresión (1) puede escribirse como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. Un vector tangente a la curva u_1 en P (para la cual u_2 y u_3 son constantes) es $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$. Entonces, un vector unitario tangente en dicha dirección es $\mathbf{e}_1 = (\partial\mathbf{r}/\partial u_1)|\partial\mathbf{r}/\partial u_1|$ de modo que $\partial\mathbf{r}/\partial u_1 = h_1\mathbf{e}_1$, donde $h_1 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_1|$. En forma similar, si $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son vectores unitarios tangentes a las curvas u_2 y u_3 en P, respectivamente, entonces $\partial\mathbf{r}/\partial u_2 = h_2\mathbf{e}_2$ y $\partial\mathbf{r}/\partial u_3 = h_3\mathbf{e}_3$, donde $h_2 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_2|$ y $h_3 = |\partial\mathbf{r}/\partial u_3|$. Las cantidades h_1, h_2 y h_3 se llaman *factores de escala*. Los vectores unitarios $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ tienen las direcciones en las que crecen u_1, u_2 y u_3, respectivamente.

Como ∇u_1 es un vector en P normal a la superficie $u_1 = c_1$, un vector unitario en dicha dirección está dado por $\mathbf{E}_1 = \nabla u_1/|\nabla u_1|$. De manera similar, los vectores unitarios $\mathbf{E}_2 = \nabla u_2/|\nabla u_2|$ y $\mathbf{E}_3 = \nabla u_3/|\nabla u_3|$ en P, son normales a las superficies $u_2 = c_2$ y $u_3 = c_3$, respectivamente.

Entonces, en cada punto P de un sistema curvilíneo, en general existen dos conjuntos de vectores unitarios, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, que son tangentes a las curvas coordenadas $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ normales a las superficies coordenadas (vea la figura 7-2). Los conjuntos son idénticos si y sólo si el sistema de coordenadas curvilíneas es ortogonal (consulte el problema 7.19). Ambos conjuntos son análogos a los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, en coordenadas rectangulares, pero difieren de éstos en que pueden cambiar de dirección de un punto a otro. Es posible demostrar (vea el problema 7.15) que los conjuntos $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ y ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3 constituyen sistemas recíprocos de vectores.

Un vector **A** puede representarse en términos de los vectores unitarios básicos $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ o $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ en la forma

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + a_3\mathbf{E}_3$$

donde A_1, A_2, A_3 y a_1, a_2, a_3 son las *componentes* respectivas de **A** en cada sistema.

También se puede representar **A** en términos de los vectores básicos $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$ y $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ o ∇u_1, ∇u_2 y ∇u_3, que se llaman *vectores unitarios básicos* pero que en general *no son* vectores unitarios. En este caso

$$\mathbf{A} = C_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} + C_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} + C_3\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

y

$$\mathbf{A} = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + c_3\boldsymbol{\beta}_3$$

donde C_1, C_2 y C_3 reciben el nombre de *componentes contravariantes* de **A**, y c_1, c_2 y c_3 se llaman *componentes covariantes* de **A** (consulte los problemas 7.33 y 7.34). Observe que $\boldsymbol{\alpha}_p = \partial\mathbf{r}/\partial u_p$, $\boldsymbol{\beta}_p = \nabla u_p$, $p = 1, 2, 3$.

7.5 LONGITUD DE ARCO Y ELEMENTOS DE VOLUMEN

En primer lugar se debe recordar que el vector de posición de un punto P puede escribirse en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. Entonces,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1\, du_1 \mathbf{e}_1 + h_2\, du_2 \mathbf{e}_2 + h_3\, du_3 \mathbf{e}_3$$

Por tanto, la diferencial de longitud de arco, ds, se determina a partir de $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Para sistemas ortogonales, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, y

$$ds^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2$$

Para sistemas curvilíneos no ortogonales, o generales, consulte el problema 7.17.

A lo largo de una curva u_1, son constantes u_2 y u_3, por lo que $d\mathbf{r} = h_1\, du_1 \mathbf{e}_1$. Entonces, la diferencial de longitud de arco ds_1 a lo largo de u_1 en P es $h_1 du_1$. De manera similar, las diferenciales de longitud de arco a lo largo de u_2 y u_3 en P son $ds_2 = h_2\, du_2$, $ds_3 = h_3\, du_3$.

En relación con la figura 7-3, el elemento de volumen para un sistema de coordenadas curvilíneas está dado por

$$dV = |(h_1\, du_1 \mathbf{e}_1) \cdot (h_2\, du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3\, du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$$

ya que $|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3| = 1$.

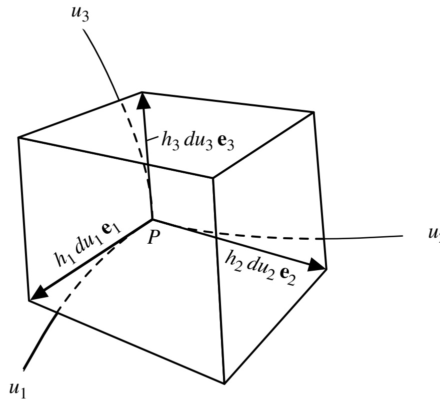


Figura 7-3

7.6 GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Las operaciones de gradiente, divergencia y rotacional pueden expresarse en términos de coordenadas curvilíneas. En específico, se aplica la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 7.1: Suponga que $\mathbf{\Phi}$ es una función escalar y $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ es una función vectorial de coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2 y u_3. Entonces se cumplen las leyes siguientes:

i) $$\Delta\Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

ii) $$\Delta \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

iii) $$\Delta \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

*i*v) $\nabla^2\Phi$ = Laplaciano de Φ

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Observe que si $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, y $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ se sustituyen por **i**, **j** y **k**, entonces las leyes anteriores se reducen a las expresiones habituales en coordenadas rectangulares, donde (u_1, u_2, u_3) es reemplazado por (x, y, z).

Los resultados anteriores se amplían por medio de una teoría más general de sistemas curvilíneos con el empleo de métodos de *análisis tensorial*, que se estudia en el capítulo 8.

7.7 SISTEMAS ESPECIALES DE COORDENADAS ORTOGONALES

La siguiente es una lista de nueve sistemas especiales de coordenadas ortogonales además de las rectangulares habituales (x, y, z).

1. **Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z).**
   Vea la figura 7-4. Aquí,

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\phi \quad \text{y} \quad z = z$$

   donde $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, $h_\rho = 1$, $h_\phi = \rho$ y $h_z = 1$.

2. **Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ).**
   Vea la figura 7-5. En este caso,

$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \quad \text{y} \quad z = r\cos\theta$$

   donde $r \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $h_r = 1$, $h_\theta = r$ y $h_\phi = r\,\text{sen}\,\theta$.

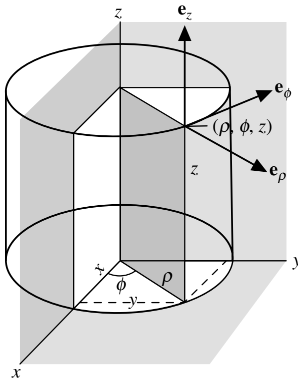


Figura 7-4

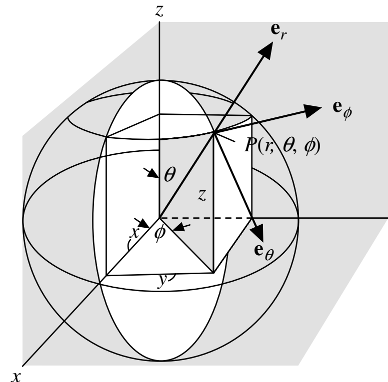


Figura 7-5

3. **Coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z).**
   Vea la figura 7-6. Ahora,

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv \quad \text{y} \quad z = z$$

   donde $-\infty < u < \infty$, $v \geq 0$, $-\infty < z < \infty$, $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $h_z = 1$.

En coordenadas cilíndricas, $u = \sqrt{2\rho}\cos(\phi/2)$, $v = \sqrt{2\rho}\,\text{sen}\,(\phi/2)$ y $z = z$.

En la figura 7-6 se muestran los trazos de las superficies coordenadas sobre el plano xy. Son parábolas con el mismo foco y eje común.

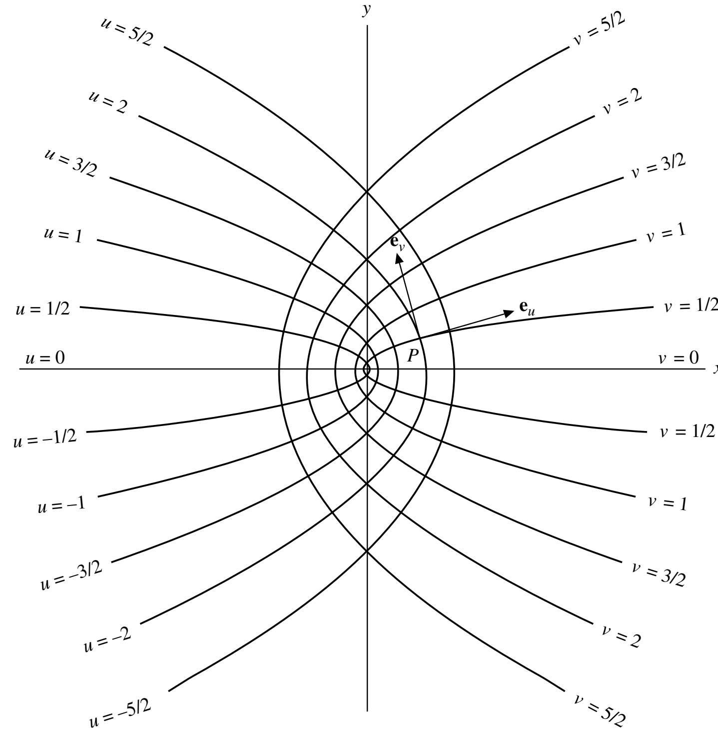


Figura 7-6

4. **Coordenadas paraboloides (u, v, ϕ).**
   Aquí,

$$x = uv\cos\phi, \quad y = uv\,\text{sen}\,\phi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

donde $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $h_\phi = uv$.

Al girar las parábolas de la figura 7-6 por arriba del eje x, se obtienen dos conjuntos de superficies coordenadas, y el eje cambia su nombre a z. El tercer conjunto de superficies coordenadas son planos que pasan a través de dicho eje.

5. **Coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z).**
   Consulte la figura 7-7. Aquí,

$$x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\,\text{senh}\,u\,\text{sen}\,v \quad \text{y} \quad z = z$$

donde $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, $h_u = h_v = a\sqrt{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v}$ y $h_z = 1$.

Los trazos de las superficies coordenadas sobre el plano xy se ilustran en la figura 7-7. Son elipses e hipérbolas con los mismos focos.

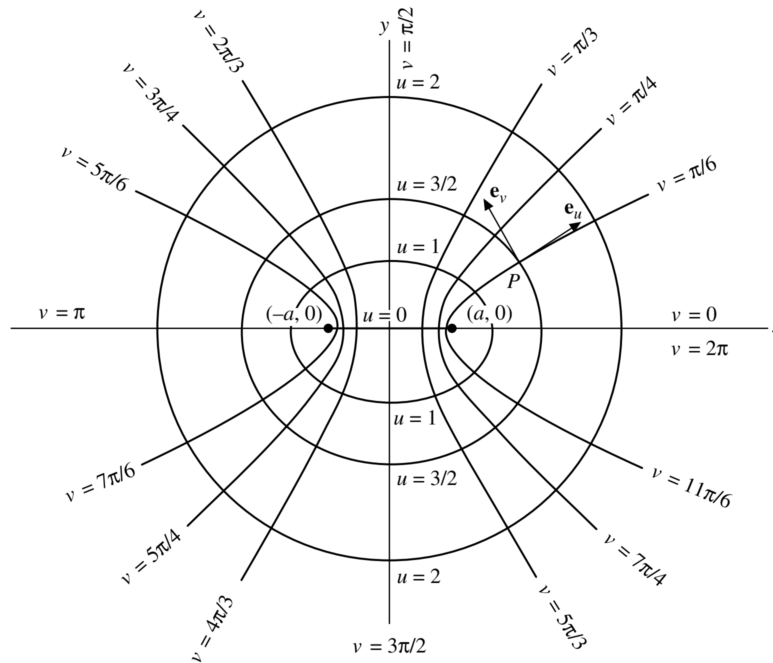


Figura 7-7

6. **Coordenadas esferoidales alargadas (ξ, η, ϕ).**
Aquí:

$$x = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \cos \phi, \quad y = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \phi, \quad z = a \cosh \xi \cos \eta$$

donde $\xi \geq 0$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta}$ y $h_\phi = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta$.

Cuando se hacen girar las curvas de la figura 7-7 alrededor del eje x se obtienen dos conjuntos de superficies coordenadas, y el eje cambia su nombre a eje z. El tercer conjunto de superficies coordenadas son planos que pasan a través de este eje.

7. **Coordenadas esferoidales achatadas (ξ, η, ϕ).**
Aquí,

$$x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi, \quad y = a \cosh \xi \cos \eta \operatorname{sen} \phi \quad \text{y} \quad z = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta$$

donde $\xi \geq 0$, $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta}$ y $h_\phi = a \cosh \xi \cos \eta$.

Cuando se hacen girar las curvas de la figura 7-7 alrededor del eje y, se obtienen dos conjuntos de superficies coordenadas, y el eje cambia su nombre a eje z. El tercer conjunto de superficies coordenadas son planos que pasan a través de este eje.

8. **Coordenadas elipsoidales (λ, μ, ν).**
Aquí,

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1, \quad \lambda < c^2 < b^2 < a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1, \quad c^2 < \mu < b^2 < a^2$$
$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1, \quad c^2 < b^2 < \nu < a^2$$
$$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}},$$
$$h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}$$
$$h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}$$

9. **Coordenadas bipolares (u, v, z).**
Consulte la figura 7-8. Aquí,

$$x^2+(y-a\cot u)^2 = a^2\csc^2 u, \quad (x-a\coth v)^2+y^2 = a^2\operatorname{csch}^2 v, \quad z = z$$

o bien,

$$x = \frac{a \operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u}, \quad z = z$$

donde $0 \le u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $h_u = h_v = a/(\cosh v - \cos u)$ y $h_z = 1$.

En la figura 7-8 se muestran las superficies coordenadas sobre el plano *xy*. Cuando las curvas de dicha figura giran alrededor del eje *y*, el eje cambia su nombre a eje *z* y se obtiene un *sistema de coordenadas toroidales*.

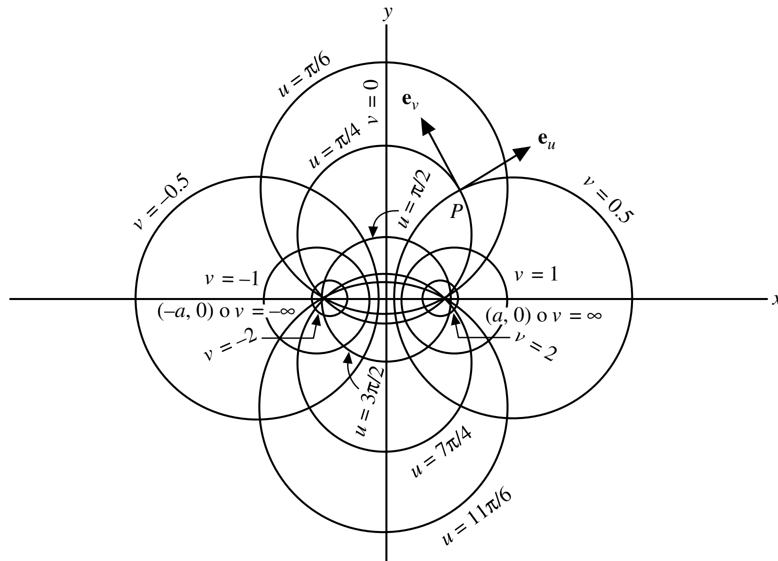


Figura 7-8

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1. Describa las superficies coordenadas y las curvas coordenadas para coordenadas *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

Solución

a) Las superficies coordenadas (o superficies de nivel) son:

$\rho = c_1$ cilindros coaxiales con el eje z (o eje z si $c_1 = 0$).
$\phi = c_2$ planos a través del eje z.
$z = c_3$ planos perpendiculares al eje z.

Las curvas coordenadas son:

Intersección de $\rho = c_1$ y $\phi = c_2$ (curva z) es una línea recta.
Intersección de $\rho = c_1$ y $z = c_3$ (curva ϕ) es una circunferencia (o punto).
Intersección de $\phi = c_2$ y $z = c_3$ (curva ρ) es una línea recta.

b) Las superficies coordenadas son:

$r = c_1$ esferas con centro en el origen (u origen si $c_1 = 0$).
$\theta = c_2$ conos con vértice en el origen (rectas si $c_2 = 0$ o π, y el plano xy si $c_2 = \pi/2$).
$\phi = c_3$ planos a través del eje z.

Las curvas coordenadas son:

Intersección de $r = c_1$ y $\theta = c_2$ (curva ϕ) es una circunferencia (o punto).
Intersección de $r = c_1$ y $\phi = c_3$ (curva θ) es una semicircunferencia ($c_1 \neq 0$).
Intersección de $\theta = c_2$ y $\phi = c_3$ (curva r) es una recta.

7.2. Determine la transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares.

Solución

Las ecuaciones que definen la transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares son:

$$x = \rho \cos \phi \tag{1}$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \tag{2}$$
$$z = z \tag{3}$$

Al elevar al cuadrado las ecuaciones (1) y (2) y sumarlas se obtiene: $\rho^2(\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) = x^2 + y^2$ o $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ya que $\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1$ y ρ es positivo.

Se divide la ecuación (2) entre (1),

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \operatorname{sen} \phi}{\rho \cos \phi} = \tan \phi \quad \text{o bien} \quad \phi = \operatorname{arc\ tan} \frac{y}{x}$$

Entonces, la transformación requerida es:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$
$$\phi = \operatorname{arc\ tan} \frac{y}{x} \tag{5}$$
$$z = z \tag{6}$$

Observe que ϕ es indeterminado para puntos sobre el eje z ($x = 0$, $y = 0$). Éstos se llaman *puntos singulares* de la transformación.

7.3. Demuestre que un sistema de coordenadas cilíndricas es ortogonal.

Solución

El vector de posición de cualquier punto en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\,\text{sen}\,\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Los vectores tangente a las curvas ρ, ϕ y z están dados respectivamente por $\partial\mathbf{r}/\partial\rho$, $\partial\mathbf{r}/\partial\phi$ y $\partial\mathbf{r}/\partial z$, donde

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\rho\,\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

Los vectores unitarios en estas direcciones son

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial\rho}{|\partial\mathbf{r}/\partial\rho|} = \frac{\cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi}} = \cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial\phi}{|\partial\mathbf{r}/\partial\phi|} = \frac{-\rho\,\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}} = -\,\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\partial\mathbf{r}/\partial z}{|\partial\mathbf{r}/\partial z|} = \mathbf{k}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 &= (\cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j})\cdot(-\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}) = 0\\
\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 &= (\cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0\\
\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 &= (-\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}) = 0
\end{aligned}$$

y por tanto $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son mutuamente perpendiculares y el sistema de coordenadas es ortogonal.

7.4. Represente el vector $\mathbf{A} = z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ en coordenadas cilíndricas. Con el resultado anterior determine A_ρ, A_ϕ y A_z.

Solución

Del problema 7.3,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j} \qquad (1)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\,\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j} \qquad (2)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k} \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) en forma simultánea,

$$\mathbf{i} = \cos\phi\mathbf{e}_\rho - \text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\phi, \qquad \mathbf{j} = \text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\mathbf{e}_\phi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}\\
&= z(\cos\phi\mathbf{e}_\rho - \text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\phi) - 2\rho\cos\phi(\text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\mathbf{e}_\phi) + \rho\,\text{sen}\,\phi\mathbf{e}_z\\
&= (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\,\text{sen}\,\phi)\mathbf{e}_\rho - (z\,\text{sen}\,\phi + 2\rho\cos^2\phi)\mathbf{e}_\phi + \rho\,\text{sen}\,\phi\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

y

$$A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\,\text{sen}\,\phi, \qquad A_\phi = -z\,\text{sen}\,\phi - 2\rho\cos^2\phi \quad \text{y} \quad A_z = \rho\,\text{sen}\,\phi.$$

7.5. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$, $\dfrac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho$ donde los puntos denotan diferenciación con respecto del tiempo, t.

Solución

Del problema 7.3 se tiene

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_\phi = -\text{sen}\,\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$$

Entonces $$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\rho = -(\text{sen }\phi)\dot{\phi}\mathbf{i} + (\cos\phi)\dot{\phi}\mathbf{j} = (-\text{sen }\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})\dot{\phi} = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\phi = -(\cos\phi)\dot{\phi}\mathbf{i} - (\text{sen }\phi)\dot{\phi}\mathbf{j} = -(\cos\phi\mathbf{i} + \text{sen }\phi\mathbf{j})\dot{\phi} = -\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho$$

7.6. Exprese la velocidad **v** y la aceleración **a** de una partícula en coordenadas cilíndricas.

Solución

En coordenadas rectangulares, el vector de posición es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y los vectores de velocidad y aceleración son:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

En coordenadas cilíndricas, según el problema 7.4:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (\rho\cos\phi)(\cos\phi\mathbf{e}_\rho - \text{sen }\phi\mathbf{e}_\phi) + (\rho\,\text{sen }\phi)(\text{sen }\phi\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\mathbf{e}_\phi) + z\mathbf{e}_z\\ &= \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\mathbf{e}_\rho + \rho\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

con el resultado del problema 7.5. Al diferenciar otra vez,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z)\\ &= \dot{\rho}\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \rho\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z\\ &= \dot{\rho}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}(-\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho) + \rho\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z\\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

con el resultado del problema 7.5.

7.7. Encuentre el cuadrado del elemento de longitud de arco en coordenadas cilíndricas y determine los factores de escala correspondientes.

Solución

Primer método.

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\,\text{sen }\phi \quad \text{y} \quad z = z$$

$$dx = -\rho\,\text{sen }\phi\, d\phi + \cos\phi\, d\rho, \quad dy = \rho\cos\phi\, d\phi + \text{sen }\phi\, d\rho \quad \text{y} \quad dz = dz$$

Entonces

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho\,\text{sen }\phi\, d\phi + \cos\phi\, d\rho)^2 + (\rho\cos\phi\, d\phi + \text{sen }\phi\, d\rho)^2 + (dz)^2\\ &= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\rho)^2 + h_2^2(d\phi)^2 + h_3^2(dz)^2\end{aligned}$$

y los factores de escala son: $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\phi = \rho$ y $h_3 = h_z = 1$.

Segundo método. El vector de posición es $\mathbf{r} = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\,\text{sen }\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}dz\\ &= (\cos\phi\mathbf{i} + \text{sen }\phi\mathbf{j})\, d\rho + (-\rho\,\text{sen }\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j})\, d\phi + \mathbf{k}\, dz\\ &= (\cos\phi\, d\rho - \rho\,\text{sen }\phi\, d\phi)\mathbf{i} + (\text{sen }\phi\, d\rho + \rho\cos\phi\, d\phi)\mathbf{j} + \mathbf{k}\, dz\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} &= (\cos\phi\, d\rho - \rho\,\text{sen }\phi\, d\phi)^2 + (\text{sen }\phi\, d\rho + \rho\cos\phi\, d\phi)^2 + (dz)^2\\ &= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2\end{aligned}$$

7.8. Resuelva el problema 7.7 para coordenadas *a*) esféricas y *b*) cilíndricas parabólicas.

Solución

a) $$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad \text{y} \quad z = r \cos \theta$$

Entonces,

$$\begin{aligned} dx &= -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, d\phi + r \cos \theta \cos \phi \, d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, dr \\ dy &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \, d\phi + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi \, d\theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \, dr \\ dz &= -r \operatorname{sen} \theta \, d\theta + \cos \theta \, dr \end{aligned}$$

y

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta (d\phi)^2$$

Los factores de escala son $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$ y $h_3 = h_\phi = r \operatorname{sen} \theta$.

b) $$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv \quad \text{y} \quad z = z$$

Entonces

$$dx = u\,du - v\,dv, \quad dy = u\,dv + v\,du \quad \text{y} \quad dz = dz$$

y

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (u^2 + v^2)(du)^2 + (u^2 + v^2)(dv)^2 + (dz)^2$$

Los factores de escala son $h_1 = h_u = \sqrt{u^2 + v^2}$, $h_2 = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $h_3 = h_z = 1$.

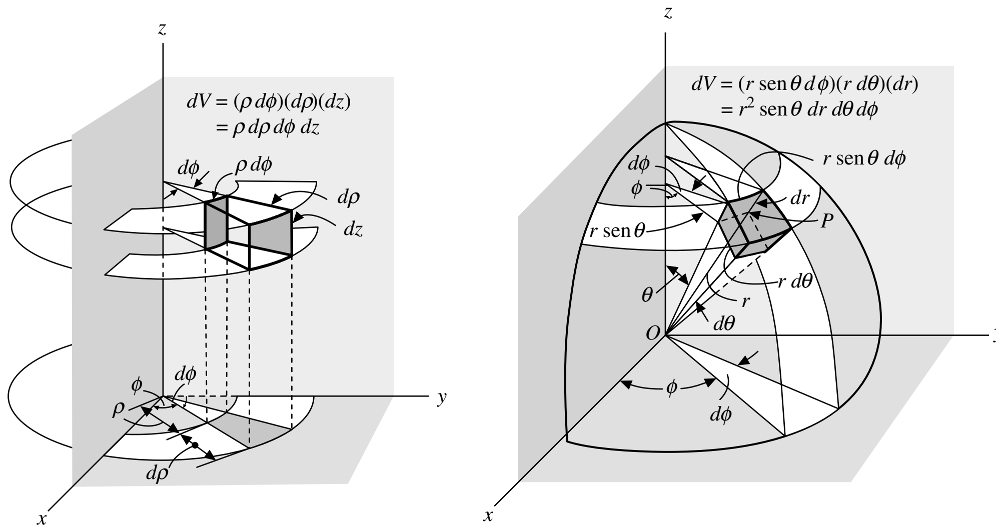
7.9. Dibuje un elemento de volumen en coordenadas *a*) cilíndricas y *b*) esféricas, y diga las magnitudes de sus aristas.

Solución

a) Las aristas del elemento de volumen en coordenadas cilíndricas (vea la figura 7-9*a*)), tienen magnitudes $\rho\, d\phi$, $d\rho$ y dz. Esto también podría verse por el hecho de que las aristas están dadas por:

$$ds_1 = h_1 du_1 = (1)(d\rho) = d\rho, \quad ds_2 = h_2 du_2 = \rho\, d\phi \quad \text{y} \quad ds_3 = (1)(dz) = dz$$

con el empleo de los factores de escala obtenidos en el problema 7.7.



a) Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas. *b*) Elemento de volumen en coordenadas esféricas.

Figura 7-9

b) Las aristas del elemento de volumen en coordenadas esféricas (vea la figura 7-9*b*)) tienen magnitudes dr, $r\,d\theta$ y r sen $\theta\,d\phi$. Esto también se evidencia con el hecho de que las aristas están dadas por

$$ds_1 = h_1\,du_1 = (1)(dr) = dr, \quad ds_2 = h_2\,du_2 = r\,d\theta \quad \text{y} \quad ds_3 = h_3\,du_3 = r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi$$

con el uso de los factores de escala obtenidos del problema 7.8*a*).

7.10. Encuentre el elemento de volumen dV en coordenadas *a*) cilíndricas, *b*) esféricas y *c*) parabólicas.

Solución

El elemento de volumen en coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2, u_3, es:

$$dV = h_1 h_2 h_3\,du_1\,du_2\,du_3$$

a) En coordenadas cilíndricas, $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$, $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$ y $h_3 = 1$ (vea el problema 7.7). Entonces,

$$dV = (1)(\rho)(1)\,d\rho\,d\phi\,dz = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

Esto también puede observarse de manera directa en la figura 7-9*a*) del problema 7.9.

b) En coordenadas esféricas, $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = r$ sen θ (vea el problema 7.8*a*)). Entonces,

$$dV = (1)(r)(r\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Esto también puede observarse directamente en la figura 7-9*b*).

c) En coordenadas cilíndricas parabólicas, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = z$, $h_1 = \sqrt{u^2 + v^2}$, $h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $h_3 = 1$ (vea el problema 7.8*b*)). Así,

$$dV = (\sqrt{u^2 + v^2})(\sqrt{u^2 + v^2})(1)\,du\,dv\,dz = (u^2 + v^2)\,du\,dv\,dz$$

7.11. Obtenga *a*) los factores de escala y *b*) el elemento de volumen dV, en coordenadas esféricas achatadas.

Solución

a)

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi, \quad y = a\cosh\xi\cos\eta\,\text{sen}\,\phi, \quad z = a\,\text{senh}\,\xi\,\text{sen}\,\eta$$
$$dx = -a\cosh\xi\cos\eta\,\text{sen}\,\phi\,d\phi - a\cosh\xi\,\text{sen}\,\eta\cos\phi\,d\eta + a\,\text{senh}\,\xi\cos\eta\cos\phi\,d\xi$$
$$dy = a\cosh\xi\cos\eta\cos\phi\,d\phi - a\cosh\xi\,\text{sen}\,\eta\,\text{sen}\,\phi\,d\eta + a\,\text{senh}\,\xi\cos\eta\,\text{sen}\,\phi\,d\xi$$
$$dz = a\,\text{senh}\,\xi\cos\eta\,d\eta + a\cosh\xi\,\text{sen}\,\eta\,d\xi$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 &= a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)(d\xi)^2 \\ &+ a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)(d\eta)^2 \\ &+ a^2\cosh^2\xi\,\cos^2\eta(d\phi)^2\end{aligned}$$

y $h_1 = h_\xi = a\sqrt{\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta}$, $h_2 = h_\eta = a\sqrt{\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta}$ y $h_3 = h_\phi = a\cosh\xi\,\cos\eta$.

b)

$$\begin{aligned}dV &= (a\sqrt{\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta})(a\sqrt{\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta})(a\cosh\xi\,\cos\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\phi \\ &= a^3(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)\cosh\xi\,\cos\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi\end{aligned}$$

7.12. Encuentre expresiones para los elementos de área en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Solución

En relación con la figura 7-3, los elementos de área están dados por

$$dA_1 = |(h_2\ du_2\mathbf{e}_2) \times (h_3\ du_3\mathbf{e}_3)| = h_2h_3|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3|du_2\ du_3 = h_2h_3\ du_2\ du_3$$

ya que $|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_1| = 1$. En forma similar:

$$dA_2 = |(h_1\ du_1\mathbf{e}_1) \times (h_3\ du_3\mathbf{e}_3)| = h_1h_3\ du_1\ du_3$$
$$dA_3 = |(h_1\ du_1\mathbf{e}_1) \times (h_2\ du_2\mathbf{e}_2)| = h_1h_2\ du_1\ du_2$$

7.13. Suponga que u_1, u_2 y u_3 son coordenadas curvilíneas ortogonales. Demuestre que el jacobiano de x, y y z con respecto de u_1, u_2 y u_3 es

$$J\left(\frac{x,\ y,\ z}{u_1,\ u_2,\ u_3}\right) = \frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u_1,\ u_2,\ u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1h_2h_3$$

Solución

Según el problema 2.38, el determinante dado es igual a:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\mathbf{k}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_3}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_1\mathbf{e}_1 \cdot h_2\mathbf{e}_2 \times h_3\mathbf{e}_3$$
$$= h_1h_2h_3\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = h_1h_2h_3$$

Si el jacobiano es idénticamente igual a cero, entonces $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ son vectores coplanares y la transformación coordenada curvilínea falla, es decir, existe una relación entre x, y y z que tiene la forma $F(x, y, z) = 0$. Entonces se debe pedir que el jacobiano sea diferente de cero.

7.14. Evalúe $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\ dx\ dy\ dz$ donde V es una esfera con centro en el origen y radio igual a a.

Solución

La integral requerida es igual a ocho veces la integral evaluada sobre la parte de la esfera contenida en el primer octante (vea la figura 7-10*a*)).

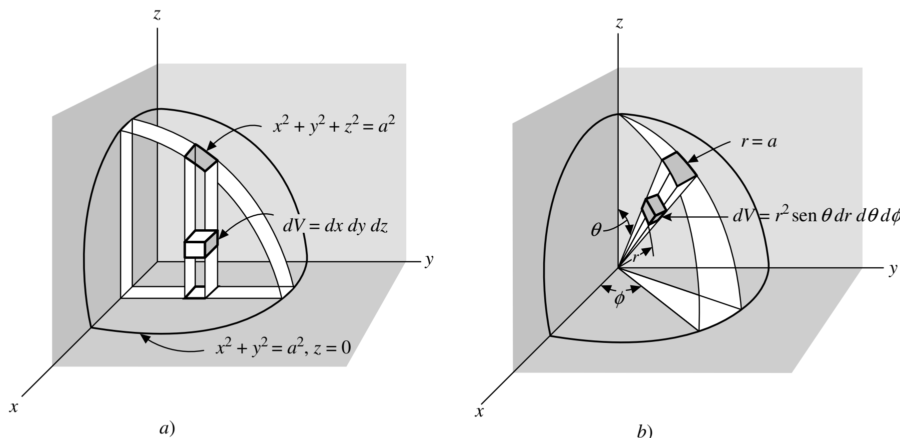


Figura 7-10

Entonces, en coordenadas rectangulares, la integral es igual a:

$$8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

pero la evaluación, aunque es posible, es tediosa. Es más fácil utilizar coordenadas esféricas para hacerla. Al cambiar a coordenadas esféricas el integrando, $x^2 + y^2 + z^2$, es sustituido por su equivalente r^2, en tanto que el elemento de volumen $dx\,dy\,dz$ es reemplazado por el elemento de volumen r^2 sen $\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ (vea el problema 7.10*b*)). Para cubrir la región requerida en el primer octante, se hacen constantes θ y ϕ (consulte la figura 7-10*b*)) y se integra de $r = 0$ a $r = a$; entonces se hace constante a ϕ y se integra de $\theta = 0$ a $\pi/2$; por último se integra con respecto de ϕ de $\phi = 0$ a $\phi = \pi/2$. Aquí realizamos la integración en el orden r, θ, ϕ, aunque puede usarse cualquier otro orden. El resultado es:

$$8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}(r^2)(r^2\text{sen }\theta\,dr\,d\theta\,d\phi) = 8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a} r^4\text{sen }\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= 8\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{r^5}{5}\text{sen }\theta\Big|_{r=0}^{a}\,d\theta\,d\phi = \frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\text{sen }\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2} -\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/2}\,d\phi = \frac{8a^5}{5}\int_{\phi=0}^{\pi/2}d\phi = \frac{4\pi a^5}{5}$$

Físicamente, la integral representa el momento de inercia de la esfera con respecto del origen, es decir, el momento polar de inercia, si la esfera tiene densidad unitaria.

En general, cuando se transforman integrales múltiples de coordenadas rectangulares a curvilíneas ortogonales, el elemento de volumen $dx\,dy\,dz$ es sustituido por $h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3$, o su equivalente.

$$J\left(\frac{x,\,y,\,z}{u_1,\,u_2,\,u_3}\right)du_1\,du_2\,du_3$$

donde J es el jacobiano de la transformación de x, y, z a u_1, u_2, u_3 (vea el problema 7.13).

7.15. Sean u_1, u_2 y u_3 las coordenadas generales. Demuestre que $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ y ∇u_1, ∇u_2 y ∇u_3 son sistemas de vectores recíprocos.

Solución

Se debe demostrar que

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_p}\cdot\nabla u_q = \begin{cases}1 & \text{si } p = q\\ 0 & \text{si } p \neq q\end{cases}$$

donde p y q adoptan cualquiera de los valores 1, 2 y 3. Tenemos:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3$$

Se multiplica por $\nabla u_1\,\cdot$. Entonces,

$$\nabla u_1\cdot d\mathbf{r} = du_1 = \left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right)du_1 + \left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right)du_2 + \left(\nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right)du_3$$

o bien:

$$\nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} = 1,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} = 0,\quad \nabla u_1\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = 0$$

De modo similar, las relaciones restantes se demuestran con la multiplicación por $\nabla u_2\,\cdot$ y $\nabla u_3\,\cdot$.

7.16. Demuestre que $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right\}\{\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3\} = 1$.

Solución

Del problema 7.15, $\partial \mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial \mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial \mathbf{r}/\partial u_3$ y ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3, son sistemas de vectores recíprocos. Entonces, se llega al resultado requerido con el problema 2.53*c*).

El resultado es equivalente a un teorema sobre los jacobianos para

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{u_1,\, u_2,\, u_3}{x,\, y,\, z}\right)$$

y por tanto $J\left(\dfrac{x,\, y,\, z}{u_1,\, u_2,\, u_3}\right)J\left(\dfrac{u_1,\, u_2,\, u_3}{x,\, y,\, z}\right) = 1$, con el empleo del resultado del problema 7.13.

7.17. Demuestre que el cuadrado del elemento de la longitud de arco en coordenadas curvilíneas generales se puede expresar con

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, du_p\, du_q$$

Solución

Se tiene que

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = \boldsymbol{\alpha}_1\, du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\, du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\, du_3$$

Entonces

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1\; du_1^2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\; du_1\; du_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3\; du_1\; du_3 \\ &\quad + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1\; du_2\; du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\; du_2^2 + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3\; du_2\; du_3 \\ &\quad + \boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1\; du_3\; du_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\; du_3\; du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3\; du_3^2 \\ &= \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\; du_p\; du_q \end{aligned}$$

donde $g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_q$.

Ésta se llama la *forma cuadrática fundamental* o *forma métrica*. Las cantidades g_{pq} se denominan *coeficientes métricos* y son simétricos, es decir $g_{pq} = g_{qp}$. Si $g_{pq} = 0$, $p \neq q$, entonces el sistema de coordenadas es ortogonal. En este caso, $g_{11} = h_1^2$, $g_{22} = h_2^2$, $g_{33} = h_3^2$. La forma métrica extendida a un espacio dimensional mayor tiene importancia fundamental en la teoría de la relatividad (consulte el capítulo 8).

Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas ortogonales

7.18. Obtenga una expresión para $\nabla\Phi$ en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Solución

Sea $\nabla\Phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$, donde deben encontrarse f_1, f_2 y f_3. Como

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\; du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\; du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\; du_3 \\ &= h_1\mathbf{e}_1\; du_1 + h_2\mathbf{e}_2\; du_2 + h_3\mathbf{e}_3\; du_3 \end{aligned}$$

se tiene

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = h_1 f_1\, du_1 + h_2 f_2\, du_2 + h_3 f_3\, du_3 \tag{1}$$

Pero

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} du_3 \tag{2}$$

Al igualar las ecuaciones (1) y (2),

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \quad \text{y} \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

Entonces,

$$\nabla\Phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

Esto indica la equivalencia del operador

$$\nabla \equiv \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

que se reduce a la expresión usual para el operador ∇ en coordenadas rectangulares.

7.19. Sean u_1, u_2 y u_3 coordenadas ortogonales. *a*) Demuestre que $|\nabla u_p| = h_p^{-1}$, $p = 1, 2, 3$. *b*) Demuestre que $\mathbf{e}_p = \mathbf{E}_p$.

Solución

a) Sea $\Phi = u_1$ del problema 7.18. Entonces $\nabla u_1 = \mathbf{e}_1/h_1$ y así $|\nabla u_1| = |\mathbf{e}_1|/h_1 = h_1^{-1}$, puesto que $|\mathbf{e}_1| = 1$. De manera similar, al tener $\Phi = u_2$ y u_3, $|\nabla u_2| = h_2^{-1}$ y $|\nabla u_3| = h_3^{-1}$.

b) Por definición, $\mathbf{E}_p = \dfrac{\nabla u_p}{|\nabla u_p|}$. Del inciso *a*), podemos escribirlo $\mathbf{E}_p = h_p \nabla u_p = \mathbf{e}_p$ y el resultado se demuestra.

7.20. Demuestre $\mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$ con ecuaciones similares para $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ donde u_1, u_2 y u_3 son coordenadas ortogonales.

Solución

Del problema 7.19,

$$\nabla u_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}, \qquad \nabla u_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \qquad \text{y} \qquad \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}.$$

Entonces

$$\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{h_2 h_3} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{e}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3.$$

De manera similar,

$$\mathbf{e}_2 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{e}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2.$$

7.21. Demuestre que en coordenadas ortogonales,

a) $\nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\dfrac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)$

b) $\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)$

con resultados similares para los vectores $A_2\mathbf{e}_2$ y $A_3\mathbf{e}_3$.

Solución

a) Del problema 7.20,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) &= \nabla \cdot (A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(A_1h_2h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1h_2h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla(A_1h_2h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} + 0 = \nabla(A_1h_2h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} \\
&= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_2h_3) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_2h_3)\right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)
\end{aligned}$$

b) $\nabla \times (A_1\mathbf{e}_1) = \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1)$

$$\begin{aligned}
&= \nabla(A_1h_1) \times \nabla u_1 + A_1h_1 \nabla \times \nabla u_1 \\
&= \nabla(A_1h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + \mathbf{0} \\
&= \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1)\right] \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \\
&= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)
\end{aligned}$$

7.22. Exprese div $\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ en coordenadas ortogonales.

Solución

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) + \nabla \cdot (A_2\mathbf{e}_2) + \nabla \cdot (A_3\mathbf{e}_3) \\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]
\end{aligned}$$

con el resultado del problema 7.21*a*).

7.23. Exprese rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas ortogonales.

Solución

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) = \nabla \times (A_1\mathbf{e}_1) + \nabla \times (A_2\mathbf{e}_2) + \nabla \times (A_3\mathbf{e}_3) \\
&= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1) + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2) \\
&\quad + \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3) \\
&= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right] \\
&\quad + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]
\end{aligned}$$

con el problema 7.21*b*). Esto puede escribirse

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix}$$

7.24. Exprese $\nabla^2\psi$ en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Solución

Del problema 7.18,

$$\nabla\psi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}.$$

Si $\mathbf{A} = \nabla\psi$, entonces $A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}$, $A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}$, $A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}$ y por el problema 7.22,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi \\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]\end{aligned}$$

7.25. Use la definición de integral

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint_{\Delta S}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS}{\Delta V}$$

(vea el problema 6.19) para expresar $\nabla\cdot\mathbf{A}$ en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Solución

Considere el elemento de volumen ΔV (vea la figura 7-11) cuyas aristas son $h_1\,\Delta u_1$, $h_2\,\Delta u_2$ y $h_3\,\Delta u_3$.

Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria hacia fuera de la superficie ΔS de ΔV. En la cara $JKLP$, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$. Entonces, aproximadamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_{JKLP}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\text{ en el punto }P)\text{ (área de }JKLP) \\ &= [(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)\cdot(-\mathbf{e}_1)](h_2h_3\,\Delta u_2\,\Delta u_3) \\ &= -A_1h_2h_3\,\Delta u_2\,\Delta u_3\end{aligned}$$

En la cara $EFGH$, la integral de superficie es

$$A_1h_2h_3\,\Delta u_2\,\Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3\,\Delta u_2\,\Delta u_3)\,\Delta u_1$$

diferente en infinitésimos de orden mayor que $\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$. Entonces, la contribución neta de estas dos caras a la integral de superficie es:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3\,\Delta u_2\,\Delta u_3)\,\Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)\,\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$$

La contribución de las seis caras de ΔV es

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$$

Se divide esto entre el volumen $h_1h_2h_3\,\Delta u_1\,\Delta u_2\,\Delta u_3$, y se obtiene el límite cuando Δu_1, Δu_2 y Δu_3 tienden a cero, y se llega a:

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]$$

Observe que se habría obtenido el mismo resultado si se hubiera elegido el elemento de volumen ΔV de modo que P estuviera en su centro. En este caso, el cálculo se haría en forma análoga al que se siguió en el problema 4.21.

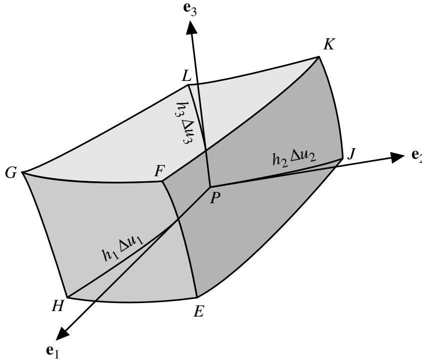


Figura 7-11

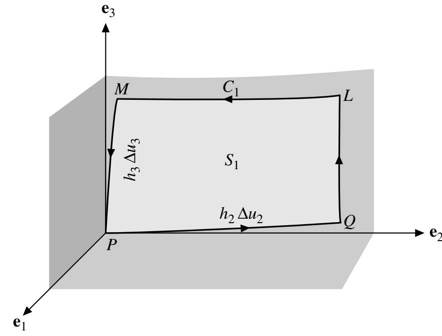


Figura 7-12

7.26. Utilice la definición de integral

$$(\text{rot}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}$$

(consulte el problema 6.35) para expresar $\nabla\times\mathbf{A}$ en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Solución

Primero calcularemos $(\text{rot}\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{e}_1$. Para ello, consideremos la superficie S_1 normal a $\mathbf{e}_1$ en P, como se ilustra en la figura 7-12. La frontera de S_1 se denotará con C_1. Sea $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$. Tenemos:

$$\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{PQ}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{QL}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{LM}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{MP}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

Se cumplen las aproximaciones siguientes:

$$\int_{PQ}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{A}\text{ en }P)\cdot(h_2\,\Delta u_2\mathbf{e}_2) \tag{1}$$

$$= (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)\cdot(h_2\,\Delta u_2\mathbf{e}_2) = A_2h_2\,\Delta u_2$$

Entonces

$$\int_{ML}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A_2h_2\,\Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2\,\Delta u_2)\,\Delta u_3$$

o bien

$$\int_{LM}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -A_2h_2\,\Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2\,\Delta u_2)\,\Delta u_3 \tag{2}$$

De manera similar,

$$\int_{PM}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{A}\text{ en }P)\cdot(h_3\Delta u_3\mathbf{e}_3) = A_3h_3\,\Delta u_3$$

o:

$$\int_{MP}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -A_3h_3\,\Delta u_3 \tag{3}$$

y

$$\int_{QL} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_3 h_3 \, \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3 \, \Delta u_3) \, \Delta u_2 \tag{4}$$

Al sumar (1), (2), (3) y (4), se tiene

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3 \, \Delta u_3) \, \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2 \, \Delta u_2) \, \Delta u_3 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2) \right] \Delta u_2 \, \Delta u_3 \end{aligned}$$

que difiere en infinitésimos de orden mayor que $\Delta u_2 \Delta u_3$.

Se divide entre el área de S_1 igual a $h_2 h_3 \, \Delta u_2 \Delta u_3$ y se obtiene el límite cuando Δu_2 y Δu_3 tienden a cero,

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2) \right]$$

De manera similar, al elegir áreas S_2 y S_3 perpendiculares a $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ en P, respectivamente, se encuentra $(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_2$ y $(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_3$. Esto lleva al resultado requerido:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

El resultado también hubiera podido obtenerse con la elección de P como el centro del área S_1; entonces, el cálculo se habría hecho como en el problema 6.36.

7.27. Exprese en coordenadas cilíndricas las cantidades: *a*) $\nabla \Phi$, *b*) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, *c*) $\nabla \times \mathbf{A}$ y *d*) $\nabla^2 \Phi$.

Solución

Para coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z),

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \phi \quad \text{y} \quad u_3 = z; \qquad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z;$$

y

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\phi = \rho \quad \text{y} \quad h_3 = h_z = 1$$

a)
$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$b)\quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$
$$= \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\big((\rho)(1)A_\rho\big) + \frac{\partial}{\partial \phi}\big((1)(1)A_\phi\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big((1)(\rho)A_z\big)\right]$$
$$= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

donde $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_1 + A_\phi \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$, es decir, $A_1 = A_\rho$, $A_2 = A_\phi$ y $A_3 = A_z$.

$$c)\quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \rho\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\mathbf{e}_z\right]$$

$$d)\quad \nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{(1)(1)}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

7.28. Exprese: *a)* $\nabla \times \mathbf{A}$ *y b)* $\nabla^2\psi$ en coordenadas esféricas.

Solución

Aquí, $u_1 = r$, $u_2 = \theta$ y $u_3 = \phi$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\phi$; $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$ y $h_3 = h_\phi = r \operatorname{sen} \theta$.

$$a)\quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1)(r)(r\operatorname{sen}\theta)}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\operatorname{sen}\theta\,A_\phi \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}(r\operatorname{sen}\theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(rA_\theta)\right\}\mathbf{e}_r\right.$$
$$\left. + \left\{\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\operatorname{sen}\theta\,A_\phi)\right\}r\mathbf{e}_\theta + \left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right\}r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\phi\right]$$

$$b)\quad \nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial u_3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(1)(r)(r\operatorname{sen}\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(r)(r\operatorname{sen}\theta)}{(1)}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{(r\operatorname{sen}\theta)(1)}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{(1)(r)}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

7.29. Escriba la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas parabólicas.

Solución

Del problema 7.8*b*),

$$u_1 = u, \quad u_2 = v \quad \text{y} \quad u_3 = z; \qquad h_1 = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_2 = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{y} \quad h_3 = 1$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi &= \frac{1}{u^2 + v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left((u^2 + v^2)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

y la ecuación de Laplace es $\nabla^2 \psi = 0$ o bien

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + (u^2 + v^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

7.30. Exprese la ecuación de conducción del calor, $\partial U/\partial t = \kappa \nabla^2 U$, en coordenadas cilíndricas elípticas.

Solución

En este caso, $u_1 = u$, $u_2 = v$ y $u_3 = z$; $h_1 = h_2 = a\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v}$ y $h_3 = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\end{aligned}$$

y la ecuación de conducción del calor es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left\{\frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\}$$

Coordenadas curvilíneas de superficie

7.31. Demuestre que el cuadrado del elemento de longitud de arco sobre la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ puede escribirse así

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Solución

Se tiene

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv$$

Por tanto

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}du\,dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv^2 \\ &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\end{aligned}$$

7.32. Demuestre que el elemento de área de la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ está dado por

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Solución

El elemento de superficie está dado por

$$dS = \left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv\right)\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)}\, du\, dv$$

La cantidad bajo el radical es igual a lo siguiente (vea el problema 2.48):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = EG - F^2$$

de donde se obtiene el resultado.

Problemas varios sobre coordenadas generales

7.33. Sea **A** un vector definido dado con respecto de dos sistemas de coordenadas curvilíneas generales (u_1, u_2, u_3) y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$. Encuentre la relación entre las componentes contravariantes del vector en los dos sistemas de coordenadas.

Solución

Suponga que las ecuaciones de transformación de un sistema rectangular (x, y, z) a los sistemas (u_1, u_2, u_3) y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ están dadas por:

$$\begin{cases} x = x_1(u_1, u_2, u_3), \quad y = y_1(u_1, u_2, u_3), \quad z = z_1(u_1, u_2, u_3) \\ x = x_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad y = y_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad z = z_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \end{cases} \tag{1}$$

Entonces existe una transformación directamente del sistema (u_1, u_2, u_3) al sistema $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ definida por:

$$u_1 = u_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad u_2 = u_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \quad \text{y} \quad u_3 = u_3(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \tag{2}$$

y a la inversa. De la ecuación (1),

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = \boldsymbol{\alpha}_1\, du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\, du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\, du_3$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1\, d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2\, d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3\, d\bar{u}_3$$

Entonces

$$\boldsymbol{\alpha}_1\, du_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\, du_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\, du_3 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1\, d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2\, d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3\, d\bar{u}_3 \tag{3}$$

De la ecuación (2),

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3$$

Al sustituir en la ecuación (3) e igualar los coeficientes de $d\bar{u}_1$, $d\bar{u}_2$ y $d\bar{u}_3$ en ambos lados encontramos que:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} + \boldsymbol{\alpha}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases} \tag{4}$$

Ahora es posible expresar **A** en los dos sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{A} = C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \bar{C}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{C}_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \bar{C}_3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 \tag{5}$$

donde C_1, C_2 y C_3 y $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ y $\bar{C}_3$ son las componentes contravariantes de **A** en los dos sistemas. Al sustituir la ecuación (4) en la (5),

$$\begin{aligned} C_1\boldsymbol{\alpha}_1 + C_2\boldsymbol{\alpha}_2 + C_3\boldsymbol{\alpha}_3 &= \bar{C}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{C}_2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \bar{C}_3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 \\ &= \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3}\right)\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &\quad + \left(\bar{C}_1 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3}\right)\boldsymbol{\alpha}_3 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{cases} C_1 = \bar{C}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \\ C_2 = \bar{C}_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \\ C_3 = \bar{C}_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases} \tag{6}$$

o, en notación abreviada,

$$C_p = \bar{C}_1 \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_3} \qquad p = 1,\ 2,\ 3 \tag{7}$$

y, en forma aún más abreviada,

$$C_p = \sum_{q=1}^{3} \bar{C}_q \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_q} \qquad p = 1,\ 2,\ 3 \tag{8}$$

De modo similar, al intercambiar las coordenadas vemos que

$$\bar{C}_p = \sum_{q=1}^{3} C_q \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q} \qquad p = 1,\ 2,\ 3 \tag{9}$$

Los resultados anteriores llevan a adoptar la definición siguiente. Si tres cantidades, C_1, C_2 y C_3 de un sistema de coordenadas (u_1, u_2, u_3) se relacionan con otras tres cantidades, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ y $\bar{C}_3$ de otro sistema de coordenadas, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ por las ecuaciones de transformación (6), (7), (8) o (9), entonces las cantidades se llaman *componentes de un vector contravariante* o *tensor contravariante de primer rango*.

7.34. Resuelva el problema 7.33 para las componentes covariantes de **A**.

Solución

Escriba las componentes covariantes de **A** en los sistemas (u_1, u_2, u_3) y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, como c_1, c_2, c_3 y $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, respectivamente. Entonces:

$$\mathbf{A} = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \bar{c}_1\nabla\bar{u}_1 + \bar{c}_2\nabla\bar{u}_2 + \bar{c}_3\nabla\bar{u}_3 \tag{1}$$

Ahora, como $\bar{u}_p = \bar{u}_p(u_1, u_2, u_3)$ con $p = 1, 2, 3$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial x} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial y} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial y} \qquad p = 1, 2, 3 \\ \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial z} = \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3}\dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{cases} \tag{2}$$

Asimismo,

$$c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2 + c_3\nabla u_3 = \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\mathbf{k} \tag{3}$$

y

$$\bar{c}_1\boldsymbol{\rho}\,\bar{u}_1 + \bar{c}_2\boldsymbol{\rho}\,\bar{u}_2 + \bar{c}_3\boldsymbol{\rho}\,\bar{u}_3 = \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}\right)\mathbf{k} \tag{4}$$

Al igualar coeficientes de **i**, **j** y **k** en las ecuaciones (3) y (4),

$$\begin{cases} c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial x} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial y} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial y} \\ c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + c_3\dfrac{\partial u_3}{\partial z} = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial z} \end{cases} \tag{5}$$

Al sustituir las ecuaciones (2) con $p = 1, 2, 3$, en cualquiera de las ecuaciones (5), e igualar los coeficientes de

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z} \text{ y } \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

en cada lado, se encuentra que

$$\begin{cases} c_1 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1} \\ c_2 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2} \\ c_3 = \bar{c}_1\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} + \bar{c}_2\dfrac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} + \bar{c}_3\dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3} \end{cases} \tag{6}$$

que puede escribirse como

$$c_p = \bar{c}_1\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_p} + \bar{c}_2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_p} + \bar{c}_3\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_p} \qquad p = 1, 2, 3 \tag{7}$$

o bien,

$$c_p = \sum_{q=1}^{3} \bar{c}_q\frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_p} \qquad p = 1, 2, 3 \tag{8}$$

Del mismo modo, puede demostrarse que:

$$\bar{c}_p = \sum_{q=1}^{3} c_q \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p} \qquad p = 1, 2, 3 \tag{9}$$

Los resultados anteriores nos llevan a adoptar la definición siguiente. Si tres cantidades c_1, c_2, c_3 de un sistema de coordenadas (u_1, u_2, u_3) están relacionadas con otras tres cantidades, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ de otro sistema de coordenadas $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ por las ecuaciones de transformación (6), (7), (8) o (9), entonces las cantidades se llaman *componentes de un vector covariante*, o bien *tensor covariante del primer rango*.

Al generalizar los conceptos de este problema y del 7.33 a espacios de dimensión mayor, y con la generalización del concepto de vector, llegamos al *análisis tensorial*, que se estudia en el capítulo 8. En el proceso de generalización es conveniente usar una notación concisa a fin de expresar las ideas fundamentales en forma breve. Sin embargo, debe recordarse que a pesar de la notación que se emplee, las ideas básicas que se tratan en el capítulo 8 están estrechamente relacionadas con las que se analizan en éste.

7.35. *a*) Demuestre que en coordenadas generales (u_1, u_2, u_3),

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right)^2$$

donde g_{pq} son los coeficientes de $du_p\, du_q$ en ds^2 (vea el problema 7.17).

b) Demuestre que el elemento de volumen en coordenadas generales es $\sqrt{g}\, du_1\, du_2\, du_3$.

Solución

a) Del problema 7.17,

$$g_{pq} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \boldsymbol{\alpha}_q = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_q} = \frac{\partial x}{\partial u_p}\frac{\partial x}{\partial u_q} + \frac{\partial y}{\partial u_p}\frac{\partial y}{\partial u_q} + \frac{\partial z}{\partial u_p}\frac{\partial z}{\partial u_q} \qquad p, q = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Entonces, con el uso del teorema siguiente sobre multiplicación de determinantes,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 & a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 & a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 & b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 & c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

se tiene que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

b) El elemento de volumen está dado por

$$dV = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \right) \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1\, du_2\, du_3$$

$$= \sqrt{g}\, du_1\, du_2\, du_3 \qquad \text{para la parte } a).$$

Observe que $\sqrt{g}$ es el valor absoluto del jacobiano de x, y y z, con respecto de u_1, u_2 y u_3 (vea el problema 7.13).

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.36. Describa y dibuje las superficies y curvas coordenadas para *a*) cilíndricas elípticas, *b*) bipolares y *c*) cilíndricas parabólicas.

7.37. Determine la transformación de coordenadas *a*) esféricas a rectangulares y *b*) esféricas a cilíndricas.

7.38. Exprese cada uno de los siguientes lugares geométricos en coordenadas esféricas: *a*) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, *b*) el cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, *c*) el paraboloide $z = x^2 + y^2$, *d*) el plano $z = 0$ y *e*) el plano $y = x$.

7.39. Suponga que ρ, ϕ, z son coordenadas cilíndricas. Describa cada uno de los lugares geométricos siguientes y escriba la ecuación respectiva en coordenadas rectangulares: *a*) $\rho = 4$ y $z = 0$, *b*) $\rho = 4$, *c*) $\phi = \pi/2$ y *d*) $\phi = \pi/3$ y $z = 1$.

7.40. Suponga que u, v y z son coordenadas cilíndricas elípticas, donde $a = 4$. Describa cada uno de los lugares geo-métricos siguientes, y escriba la ecuación para cada uno en coordenadas rectangulares:
a) $v = \pi/4$, *b*) $u = 0$ y $z = 0$, *c*) $u = \ln 2$ y $z = 2$ y *d*) $v = 0$ y $z = 0$.

7.41. Suponga que u, v y z son coordenadas cilíndricas parabólicas. Grafique las curvas o regiones descritas por cada una de las siguientes: *a*) $u = 2$ y $z = 0$, *b*) $v = 1$ y $z = 2$, *c*) $1 \leq u \leq 2$, $2 \leq v \leq 3$ y $z = 0$ y *d*) $1 < u < 2$, $2 < v < 3$ y $z = 0$.

7.42. *a*) Encuentre los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ de un sistema de coordenadas esféricas en términos de **i**, **j** y **k**.
b) Resuelva para **i**, **j** y **k** en términos de $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$.

7.43. Represente el vector $\mathbf{A} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$ en coordenadas esféricas y determine A_r, A_θ y A_ϕ.

7.44. Pruebe que un sistema de coordenadas esféricas es ortogonal.

7.45. Demuestre que son ortogonales los sistemas de coordenadas *a*) cilíndricas parabólicas, *b*) cilíndricas elípticas y *c*) esferoidales achatadas.

7.46. Haga la demostración de que $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \operatorname{sen}\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$, $\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\operatorname{sen}\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_r - \cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta$.

7.47. Exprese la velocidad **v** y la aceleración **a** de una partícula en coordenadas esféricas.

7.48. Determine el cuadrado del elemento de longitud de arco y los factores de escala correspondientes en coordenadas: *a*) paraboloides, *b*) cilíndricas elípticas y *c*) esferoidales achatadas.

7.49. Encuentre el elemento de volumen dV en coordenadas: *a*) paraboloides, *b*) cilíndricas elípticas y *c*) bipolares.

7.50. Encuentre *a*) los factores de escala y *b*) el elemento de volumen dV para coordenadas esferoidales alargadas.

7.51. Obtenga expresiones para los factores de escala en coordenadas: *a*) elipsoidales y *b*) bipolares.

7.52. Determine los elementos de área de un elemento de volumen en coordenadas: *a*) cilíndricas, *b*) esféricas y *c*) paraboloides.

7.53. Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que un sistema de coordenadas curvilíneas sea ortogonal es que $g_{pq} = 0$ para $p \neq q$.

7.54. Encuentre el jacobiano $J\left(\dfrac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$ para coordenadas: *a*) cilíndricas, *b*) esféricas, *c*) cilíndricas parabólicas, *d*) cilíndricas elípticas y *e*) esféricas alargadas.

7.55. Evalúe $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, donde V es la región acotada por $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - (x^2 + y^2)$. *Sugerencia:* Use coordenadas cilíndricas.

7.56. Encuentre el volumen de la más pequeña de las dos regiones limitadas por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

7.57. Use coordenadas esféricas para calcular el volumen de la más chica de las dos regiones acotadas por una esfera de radio a y un plano que la interseca a una distancia h a partir de su centro.

7.58. *a*) Describa las superficies coordenadas y curvas coordenadas para el sistema:

$$x^2 - y^2 = 2u_1 \cos u_2, \qquad xy = u_1 \operatorname{sen} u_2 \qquad \text{y} \qquad z = u_3$$

b) Demuestre que el sistema es ortogonal. *c*) Determine $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$ para el sistema. *d*) Demuestre que u_1 y u_2 están relacionados con las coordenadas cilíndricas ρ y ϕ, y determine la relación.

7.59. Encuentre el momento de inercia de la región limitada por $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 - y^2 - 4$, $xy = 1$, $xy = 2$, $z = 1$ y $z = 3$, con respecto del eje z, si la densidad es constante e igual a κ. *Sugerencia*: Haga $x^2 - y^2 = 2u$, $xy = v$.

7.60. Determine $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$, ∇u_1, ∇u_2, ∇u_3 en coordenadas: *a*) cilíndricas, *b*) esféricas y *c*) cilíndricas parabólicas. Demuestre que para estos sistemas, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$.

7.61. Dada la transformación de coordenadas $u_1 = xy$, $2u_2 = x^2 + y^2$ y $u_3 = z$. *a*) Demuestre que el sistema de coordenadas no es ortogonal. *b*) Obtenga $J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$. *c*) Calcule ds^2.

7.62. Obtenga $\nabla\Phi$, div $\mathbf{A}$ y rot $\mathbf{A}$, en coordenadas cilíndricas parabólicas.

7.63. Exprese *a*) $\nabla\psi$ y *b*) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, en coordenadas esféricas.

7.64. Encuentre $\nabla^2\psi$ en coordenadas esferoidales achatadas.

7.65. Escriba la ecuación $(\partial^2\Phi/\partial x^2) + (\partial^2\Phi/\partial y^2) = \Phi$ en coordenadas cilíndricas elípticas.

7.66. Exprese la ecuación de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{E} = -(1/c)(\partial\mathbf{H}/\partial t)$, en coordenadas esferoidales alargadas.

7.67. Escriba la ecuación de Schroedinger de la mecánica cuántica, $\nabla^2\psi + (8\pi^2 m/h^2)[E - V(x, y, z)]\psi = 0$, en coordenadas cilíndricas parabólicas, donde m, h y E son constantes.

7.68. Escriba la ecuación de Laplace en coordenadas paraboloides.

7.69. Exprese la ecuación del calor, $\partial U/\partial t = \kappa\nabla^2 U$, en coordenadas esféricas si U es independiente de: *a*) ϕ, *b*) ϕ y θ *c*) r y t y *d*) ϕ, θ, y t.

7.70. Encuentre el elemento de longitud de arco sobre una esfera de radio igual a a.

7.71. Demuestre que en cualquier sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, div rot $\mathbf{A} = 0$ y rot grad $\Phi = \mathbf{0}$.

7.72. Demuestre que el área de una región dada, R, de la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ es $\iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. Use esto para determinar el área de la superficie de una esfera.

7.73. Demuestre que un vector de longitud p, que es normal en todas partes a la superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, está dado por

$$\mathrm{A} = \pm p\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) \Big/ \sqrt{EG - F^2}$$

7.74. *a*) Describa la transformación plana $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$.
b) ¿En qué condiciones serán ortogonales las rectas coordenadas u y v?

7.75. Sean (x, y) las coordenadas de un punto P en un plano rectangular xy, y (u, v) las de un punto Q en un plano rectangular uv. Si $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$, decimos que hay una *correspondencia* o *mapeo* entre los puntos P y Q.
a) Si $x = 2u + v$ y $y = u - 2v$, demuestre que las rectas en el plano xy corresponden a rectas en el plano uv.
b) ¿A qué corresponde el cuadrado limitado por $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ y $y = 5$, en el plano uv?
c) Calcule el jacobiano $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ y demuestre que esto se relaciona con las razones de las áreas del cuadrado y su imagen en el plano uv.

7.76. Sea $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ e $y = uv$. Determine la imagen (o imágenes) en el plano uv de un cuadrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$, en el plano xy.

7.77. Demuestre que bajo condiciones apropiadas para F y G,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}F(x)G(y)\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u)\,du\right\}dt$$

Sugerencia: Use la transformación $x + y = t$ y $x = v$, del plano xy al plano vt. El resultado es importante en la teoría de la transformada de Laplace.

7.78. *a*) Sea $x = 3u_1 + u_2 - u_3$, $y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$ y $z = 2u_1 - u_2 - u_3$. Encuentre el volumen del cubo limitado por $x = 0$, $x = 15$, $y = 0$, $y = 10$, $z = 0$ y $z = 5$, y la imagen de este cubo en el sistema de coordenadas rectangulares $u_1u_2u_3$.
b) Relacione la razón de estos volúmenes con el jacobiano de la transformación.

7.79. Sean (x, y, z) y (u_1, u_2, u_3) las coordenadas rectangulares y curvilíneas de un punto, respectivamente.
a) Si $x = 3u_1 + u_2 - u_3$, $y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$ y $z = 2u_1 - u_2 - u_3$, ¿es ortogonal el sistema $u_1u_2u_3$?
b) Encuentre ds^2 y g para dicho sistema.
c) ¿Cuál es la relación entre este problema y el anterior?

7.80. Sean $x = u_1^2 + 2$, $y = u_1 + u_2$ y $z = u_3^2 - u_1$. Encuentre: *a*) g y *b*) el jacobiano $J = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$. Compruebe que $J^2 = g$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.36. *a*) $u = c_1$ y $v = c_2$ son cilindros elíptico e hiperbólico, respectivamente, con sus ejes z en común. $z = c_3$, que son planos. Consulte la figura 7-7.
b) $u = c_1$ y $v = c_2$ son cilindros circulares cuyas intersecciones con el plano xy son círculos con centros en los ejes y y x, respectivamente, y que se intersecan en ángulos rectos. Los cilindros $u = c_1$ pasan todos por los puntos $(-a, 0, 0)$ y $(a, 0, 0)$. $z = c_3$ son planos. Vea la figura 7-8.
c) $u = c_1$ y $v = c_2$ son cilindros parabólicos cuyos trazos sobre el plano xy son parábolas coaxiales mutuamente perpendiculares que se intersecan, con vértices sobre el eje x pero en lados opuestos del origen. $z = c_3$ son planos. Vea la figura 7-6.
Las curvas coordenadas son las intersecciones de las superficies coordenadas.

7.37. *a*) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ y $\phi = \arctan \dfrac{y}{x}$.
b) $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\theta = \arctan \dfrac{\rho}{z}$ y $\phi = \phi$.

7.38. *a*) $r = 3$.
b) $\theta = \pi/6$.
c) $r \operatorname{sen}^2 \theta = \cos \theta$.
d) $\theta = \pi/2$.
e) El plano $y = x$ está integrado por dos semiplanos $\phi = \pi/4$ y $\phi = 5\pi/4$.

7.39. *a*) Circunferencia en el plano xy $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$.
b) Cilindro $x^2 + y^2 = 16$ cuyo eje coincide con el eje z.
c) El plano yz, donde $y \geq 0$.
d) La línea recta $y = \sqrt{3}x$ y $z = 1$, donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

7.40. *a*) Cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 8$.
b) Recta que une los puntos $(-4, 0, 0)$ y $(4, 0, 0)$, es decir, $x = t$, $y = 0$ y $z = 0$, donde $-4 \leq t \leq 4$.
c) Elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $z = 2$. *d*) La porción del eje x definida por $x \geq 4$, $y = 0$ y $z = 0$.

7.41. *a*) Parábola $y^2 = 8(x - 2)$ y $z = 0$. *b*) Parábola $y^2 = 2x + 1$ y $z = 2$. *c*) Región del plano xy acotada por las parábolas $y^2 = -2(x - 1/2)$, $y^2 = -8(x - 2)$, $y^2 = 8(x + 2)$ e $y^2 = 18(x + 9/2)$ *incluyendo* la frontera.
d) Igual que el inciso *c*), pero sin la frontera.

7.42. *a*) $\mathbf{e}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$.
b) $\mathbf{i} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \operatorname{sen}\phi\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{j} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\mathbf{e}_\phi$
$\mathbf{k} = \cos\theta\mathbf{e}_r - \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_\theta$.

7.43. $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi$ donde

$A_r = 2r\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi + 3r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi$

$A_\theta = 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi - r\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi - 3r\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi$

$A_\phi = -2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi - r\cos\theta\cos\phi$.

7.47. $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$ donde $v_r = r$, $v_\theta = r\dot\theta$ y $v_\phi = r\operatorname{sen}\theta\dot\phi$

$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi$ donde $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 - r\operatorname{sen}^2\theta\dot\phi^2$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot\phi^2 \text{ y}$$

$$a_\phi = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{dt}(r^2\operatorname{sen}^2\theta\dot\phi).$$

7.48. *a*) $ds^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + u^2v^2\,d\phi^2$, $h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$ y $h_\phi = uv$.
b) $ds^2 = a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)(du^2+dv^2) + dz^2$, $h_u = h_v = a\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v}$ y $h_z = 1$.
c) $ds^2 = a^2(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)(d\xi^2 + d\eta^2) + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\,d\phi^2$,
$h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta}$ y $h_\phi = a\cosh\xi\cos\eta$.

7.49. *a*) $uv(u^2+v^2)\,du\,dv\,d\phi$, *b*) $a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)\,du\,dv\,dz$ y *c*) $\dfrac{a^2\,du\,dv\,dz}{(\cosh v - \cos u)^2}$.

7.50. *a*) $h_\xi = h_\eta = a\sqrt{\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta}$ y $h_\phi = a\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta$.
b) $a^3(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta\,d\xi\,d\eta\,d\phi$.

7.52. *a*) $\rho\,d\rho\,d\phi$, $\rho\,d\phi\,dx$ y $d\rho\,dz$, *b*) $r\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\phi$, $r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$ y $r\,dr\,d\theta$ y
c) $(u^2+v^2)du\,dv$, $uv\sqrt{u^2+v^2}\,du\,d\phi$ y $uv\sqrt{u^2+v^2}\,dv\,d\phi$.

7.54. *a*) ρ, *b*) $r^2\operatorname{sen}\theta$, *c*) u^2+v^2, *d*) $a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)$ y *e*) $a^3(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta$

7.55. *a*) $\dfrac{256\pi}{15}$ **7.56.** $\dfrac{64\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ **7.57.** $\dfrac{\pi}{3}(2a^3 - 3a^2h + h^3)$ **7.58.** *c*) $\frac{1}{2}$, *d*) $u_1 = \frac{1}{2}\rho^2$ y $u_2 = 2\phi$

7.59. *a*) $2\,\kappa$

7.60. *a*) $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$, $\nabla_\rho = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$,

$\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\rho\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \rho\cos\phi\,\mathbf{j}$, $\nabla_\phi = \dfrac{-\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{\rho}$, $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$ y $\nabla_z = \mathbf{k}$

b) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta \ \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta \ \cos\phi\,\mathbf{i} + r\cos\theta \ \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} - r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r\operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta \ \cos\phi\,\mathbf{j}$

$\nabla_r = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \operatorname{sen}\theta \ \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$

$\nabla_\theta = \dfrac{xz\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - (x^2+y^2)\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}}{r}$

$\nabla_\phi = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2} = \dfrac{-\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}}{r\operatorname{sen}\theta}$

c) $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -v\mathbf{i} + u\mathbf{j}, \quad \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{k}$

$\nabla_u = \dfrac{u\mathbf{i} + v\mathbf{j}}{u^2+v^2}, \quad \nabla_v = \dfrac{-v\mathbf{i} + u\mathbf{j}}{u^2+v^2}, \quad \nabla_z = \mathbf{k}$

7.61. *b*) $\dfrac{1}{y^2-x^2}$, *c*) $ds^2 = \dfrac{(x^2+y^2)(du_1^2+du_2^2) - 4xy\,du_1du_2}{(x^2-y^2)^2} + du_3^2 = \dfrac{u^2(du_1^2+du_2^2) - 2u_1\,du_1du_2}{2(u_2^2-u_1^2)} + du_3^2$

7.62. $\nabla\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\mathrm{e}_u + \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\mathrm{e}_v + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{e}_z$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_v\right)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left[\left\{\frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_v\right)\right\}\sqrt{u^2+v^2}\mathrm{e}_u\right.$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_u\right) - \frac{\partial A_z}{\partial u}\right\}\sqrt{u^2+v^2}e_v$$

$$\left.+\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}A_u\right)\right\}\mathrm{e}_z\right]$$

7.63. *a*) $\nabla\psi = \dfrac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathrm{e}_\theta + \dfrac{1}{r\ \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathrm{e}_\phi$

b) $\nabla\cdot\mathbf{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \dfrac{1}{r\ \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \dfrac{1}{r\ \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$

7.64. $$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2\cosh\xi(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)$$

$$+\frac{1}{a^2\cos\eta(\operatorname{senh}^2\xi + \operatorname{sen}^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

7.65. $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)\Phi$

7.66. $$\frac{1}{aRS^2}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(RE_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\eta)\right\}Se_\xi\right.$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}(SE_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(RE_\phi)\right\}Se_\eta+\left.\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(SE_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(SE_\xi)\right\}Re_\phi\right]$$
$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_\xi}{\partial t}e_\xi-\frac{1}{c}\frac{\partial H_\eta}{\partial t}e_\eta-\frac{1}{c}\frac{\partial H_\phi}{\partial t}e_\phi$$

donde $R \equiv \operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta$ y $S \equiv \sqrt{\operatorname{senh}^2\xi+\operatorname{sen}^2\eta}$.

7.67. $\dfrac{1}{u^2+v^2}\left[\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right]+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\dfrac{8\pi^2 m}{h^2}[E-W(u,v,z)]\psi=0$, donde $W(u,v,z)=V(x,y,z)$.

7.68. $$uv^2\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+u^2v\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+(u^2+v^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=0$$

7.69. *a)* $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\kappa\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]$ *b)* $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\kappa\left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)\right]$

c) $\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}=0$ *d)* $\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dU}{dr}\right)=0$

7.70. $ds^2=a^2[d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2]$, **7.74.** *b)* $\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}=0$

7.78. *a)* 750, 75 y *b)* Jacobiano = 10

7.79. *a)* No y *b)* $ds^2=14du_1^2+6du_2^2+6du_3^2+6du_1du_2-6du_1du_3+8du_2du_3$ y $g=100$

7.80. *a)* $g=16u_1^2u_3^2$ y *b)* $J=4u_1u_3$

CAPÍTULO 8

Análisis tensorial

8.1 INTRODUCCIÓN

Las leyes físicas, si han de ser válidas, deben ser independientes de cualquier sistema de coordenadas que se utilice para describirlas matemáticamente. Un estudio de las consecuencias de este requerimiento lleva al *análisis tensorial*, que es de gran utilidad en la teoría general de la relatividad, la geometría diferencial, la mecánica, la elasticidad, la hidrodinámica, la teoría electromagnética y muchos otros campos de la ciencia y la ingeniería.

8.2 ESPACIOS DE N DIMENSIONES

Un punto en un espacio tridimensional es un conjunto de tres números, llamados coordenadas, determinados por medio de un sistema particular de coordenadas o marco de referencia. Por ejemplo, (x, y, z), (ρ, ϕ, z), (r, θ, ϕ), son coordenadas de un punto en sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, respectivamente. Por analogía, un punto en un espacio N dimensional es un conjunto de N números que se denotan con $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$, donde $1, 2, \ldots, N$ son *superíndices* y no exponentes, práctica que demostrará su utilidad más adelante.

El hecho de que no podamos visualizar puntos en espacios con más de tres dimensiones no tiene, por supuesto, nada que ver con su existencia.

8.3 TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

Sean $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ y $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ las coordenadas de un punto en dos diferentes marcos de referencia. Supongamos que existen N relaciones independientes entre las coordenadas de los dos sistemas, con la forma

$$\begin{array}{ccc} \bar{x}^1 & = & \bar{x}^1(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\ \bar{x}^2 & = & \bar{x}^2(x^1, x^2, \ldots, x^N) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{x}^N & = & \bar{x}^N(x^1, x^2, \ldots, x^N) \end{array} \tag{1}$$

que se indicarán en forma abreviada con

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2}$$

donde se supone que las funciones involucradas se evalúan en un solo valor, son continuas y tienen derivadas continuas. Entonces, a cada conjunto de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$, corresponderá un conjunto único $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ dado por

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

Las relaciones (2) o (3) definen una *transformación de coordenadas* de un marco de referencia a otro.

Convención de suma

Considere la expresión $a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$. La cual puede escribirse con el uso de la notación $\sum_{j=1}^{N} a_jx^j$. Una notación aún más breve consiste en escribir simplemente a_jx^j, donde adoptamos la convención de que siempre que un índice (superíndice o subíndice) se repita en un término dado, hemos de sumar sobre ese índice desde 1 hasta N, a menos que se especifique algo diferente. Ésta se llama *convención de suma*. Es evidente que en vez de usar el índice j podríamos emplear otra literal, por ejemplo p, y la suma se escribiría como a_px^p. Cualquier índice que se repita en un término dado de modo que se aplique la convención de la suma se llama *índice mudo* o *índice umbral*.

Un índice que ocurra sólo una vez en un término dado recibe el nombre de *índice libre* y denota cualquiera de los números 1, 2, …, N, como k en la ecuación (2) o en la (3), cada uno de los cuales representa N ecuaciones.

8.4 VECTORES CONTRAVARIANTE Y COVARIANTE

Suponga que en un sistema de coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ hay N cantidades $A^1, A^2, \ldots, A^N$ relacionadas con otras N cantidades $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^N$ en otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ por las ecuaciones de transformación

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

que según las convenciones adoptadas podría escribirse como

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$$

Entonces éstas se llaman componentes de un *vector contravariante* o *tensor contravariante de primer rango o primer orden*. Para obtener una motivación para estas transformaciones, consulte los problemas 7.33 y 7.34.

Por otro lado, suponga que en un sistema de coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ hay N cantidades $A_1, A_2, \ldots, A_N$ relacionadas con otras N cantidades $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_N$ en otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ mediante las ecuaciones de transformación

$$\bar{A}_p = \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q \qquad p = 1, 2, \ldots, N$$

o bien

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$$

Entonces, éstas reciben el nombre de *vector covariante* o *tensor covariante de primer rango o primer orden*.

Note que se usa un superíndice para indicar las componentes contravariantes, mientras que un subíndice se emplea para denotar las componentes covariantes; una excepción a esto ocurre en la notación para las coordenadas.

En vez de hablar de un tensor cuyas componentes son A^p o A_p, será frecuente que hagamos referencia a él como el tensor A^p o A_p. No debiera haber ninguna confusión en esto.

8.5 TENSORES CONTRAVARIANTES, COVARIANTES Y MIXTOS

Suponga que en un sistema de coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ hay N^2 cantidades A^{qs} relacionadas con otras N^2 cantidades $\bar{A}^{pr}$ en otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ mediante las ecuaciones de transformación

$$\bar{A}^{pr} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs} \qquad p, r = 1, 2, \ldots, N$$

o bien

$$\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$$

según las convenciones adoptadas se denominan *componentes contravariantes de un tensor de segundo rango* o de rango dos.

Las N^2 cantidades A_{qs} se llaman *componentes covariantes de un tensor de segundo rango* si

$$\overline{A}_{pr} = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} A_{qs}$$

En forma similar, las N^2 cantidades A_s^q se denominan *componentes de un tensor mixto de segundo rango* si

$$\overline{A}_r^p = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} A_s^q$$

Delta de Kronecker

La delta de Kronecker, que se denota con δ_k^j, se define como sigue:

$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Como lo indica su notación, se trata de un tensor mixto de segundo rango.

8.6 TENSORES DE RANGO MAYOR QUE DOS, CAMPOS TENSORIALES

Los tensores de rango tres o más se definen con facilidad. En específico, por ejemplo, A_{kl}^{qst} son las componentes de un tensor mixto de rango 5, contravariante de orden 3 y covariante de orden 2, donde se transforman de acuerdo con las relaciones

$$\overline{A}_{ij}^{prm} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^t}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A_{kl}^{qst}$$

Escalares o invariantes

Suponga que ϕ es una función de las coordenadas x^k, y sea que $\overline{\phi}$ denota el valor funcional bajo una transformación a un nuevo conjunto de coordenadas $\overline{x}^k$. Entonces, ϕ se llama *escalar* o *invariante* con respecto de la transformación de coordenadas si $\phi = \overline{\phi}$. Un escalar o invariante también se llama *tensor de rango cero*.

Campos tensoriales

Si a cada punto de una región en un espacio N dimensional le corresponde un tensor definido, decimos que se ha definido un *campo tensorial*. Éste es un *campo vectorial* o un *campo escalar*, en función de si el tensor es de rango uno o cero. Debe notarse que un tensor o campo tensorial no sólo es el conjunto de sus componentes en un sistema especial de coordenadas, sino *todos los posibles conjuntos* con *cualquier* transformación de coordenadas.

Tensores simétricos y simétricos oblicuos

Un tensor se llama *simétrico con respecto de dos índices contravariantes o covariantes* si sus componentes no se alteran con el intercambio de los índices. Así, si $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$, el tensor es simétrico en m y p. Si un tensor es simétrico con respecto de *cualesquiera* dos índices contravariantes *y cualesquiera* dos índices covariantes, se llama *simétrico*.

Un tensor recibe el nombre de *simétrico oblicuo con respecto de dos índices contravariantes o covariantes* si sus componentes cambian de signo con el intercambio de los índices. Así, si $A_{qs}^{mpr} = -A_{qs}^{pmr}$, el tensor es simétrico oblicuo en m y p. Si un tensor es simétrico oblicuo con respecto de *cualesquiera* dos índices contravariantes *y cualesquiera* dos índices covariantes, se denomina *simétrico oblicuo*.

8.7 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON TENSORES

Se aplican las siguientes operaciones.

1. **Adición.** La *suma* de dos o más tensores del mismo rango y tipo (es decir, el mismo número de índices contravariantes y el mismo número de índices covariantes) también es un tensor del mismo rango y tipo. Por lo que, si A_q^{mp} y B_q^{mp} son tensores, entonces $C_q^{mp} = A_q^{mp} + B_q^{mp}$ también es un tensor. La adición de tensores es conmutativa y asociativa.
2. **Sustracción.** La *diferencia* de dos tensores del mismo rango y tipo también es un tensor del mismo rango y tipo. Así, si A_q^{mp} y B_q^{mp} son tensores, entonces $D_q^{mp} = A_q^{mp} - B_q^{mp}$ también es un tensor.
3. **Producto externo.** El *producto* de dos tensores es un tensor cuyo rango es la suma de los rangos de los tensores dados. Este producto, que involucra la multiplicación ordinaria de los componentes del tensor, se llama *producto externo*. Por ejemplo, $A_q^{pr}B_s^m = C_{qs}^{prm}$ es el producto externo de A_q^{pr} y B_s^m. Sin embargo, observe que no todo tensor puede escribirse como el producto de dos tensores de rango menor. Por esta razón, la división de tensores no siempre es posible.
4. **Contracción.** Si se igualan un índice contravariante y uno covariante de un tensor, el resultado indica que ha de tomarse una sumatoria sobre los índices iguales de acuerdo con la convención de sumatoria. Esta suma resultante es un tensor de rango dos menos el del tensor original. El proceso se llama *contracción*. Por ejemplo, en el tensor de rango 5, A_{qs}^{mpr}, se hace $r = s$ para obtener $A_{qr}^{mpr} = B_q^{mp}$, que es un tensor de rango 3. Además, al hacer $p = q$, obtenemos $B_q^{mp} = C^m$, que es un tensor de rango 1.
5. **Producto interno.** Por el proceso del producto externo de dos tensores seguido de una contracción, obtenemos un nuevo tensor llamado *producto interno* de los tensores dados. El proceso se llama *multiplicación interna*. Por ejemplo, dados los tensores A_q^{mp} y B_{st}^r, el producto externo es $A_q^{mp}B_{st}^r$. Al hacer $q = r$ obtenemos el producto interno $A_r^{mp}B_{st}^r$. Al hacer $q = r$ y $p = s$, obtenemos otro producto $A_r^{mp}B_{pt}^r$. La multiplicación interna y externa de tensores es conmutativa y asociativa.
6. **Ley del cociente.** Suponga que no sabe si una cantidad X es un tensor o no. Si un producto interno de X con un tensor arbitrario es un tensor, entonces X también es un tensor. Ésta se llama *ley del cociente*.

8.8 MATRICES

Una *matriz* A de orden m por n es un arreglo de cantidades a_{pq}, llamados *elementos*, arreglados en m renglones y n columnas, y que por lo general se denota como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o, en forma abreviada, por $[a_{pq}]$ o (a_{pq}), $p = 1, \ldots, m$; $q = 1, \ldots, n$. Se usa la primera notación, $[a_{pq}]$, a menos que se establezca otra convención. Si $m = n$ la matriz es *cuadrada* de orden u o simplemente matriz de *orden* m. Si $m = 1$, es una *matriz renglón* o *vector renglón*; si $n = 1$, es una *matriz columna* o *vector columna*.

La diagonal de una matriz cuadrada que contenga los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$, se llama *diagonal principal*. Una matriz cuadrada cuyos elementos sean iguales a uno en la diagonal principal y cero en cualquier otro caso, se llama *matriz identidad* y se denota por I. Una *matriz nula*, que se denota con O, es aquella cuyos elementos son todos iguales a cero.

Álgebra de matrices

Suponga que $A = [a_{pq}]$ y $B = [b_{pq}]$ son matrices del mismo orden (m por n). Entonces, se aplican las siguientes definiciones:

1) $A = B$ si $a_{pq} = b_{pq}$ para toda p y q.
2) La suma S y la diferencia D de A y B son las matrices definidas por

$$S = A + B = [a_{pq} + b_{pq}], \quad D = A - B = [a_{pq} - b_{pq}].$$

Es decir, la suma $S = A + B$ [diferencia $D = A - B$] se obtiene sumando (restando) los elementos correspondientes de A y B.
3) El producto de un escalar λ por una matriz $A = [a_{pq}]$ se denota por λA, y es la matriz $[\lambda a_{pq}]$, donde cada elemento de A se multiplica por λ.
4) La transpuesta de una matriz A es la matriz A^T, que se forma al intercambiar sus renglones y columnas. Así, si $A = [a_{pq}]$, entonces $A^T = [a_{qp}]$.

Multiplicación de matrices

Supongamos que A y B son dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, es decir: A es una matriz de $m \times p$, y B es una matriz de $p \times n$. Entonces, el producto de A por B sí está definido, se denota con AB y es la matriz cuya entrada ij obtenemos multiplicando los elementos del renglón i de A por los elementos correspondientes de la columna j de B para luego sumar los resultados de los productos. Así, si $A = [a_{ik}]$ y $B = [b_{kj}]$, entonces $AB = [c_{ij}]$, donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Las matrices cuyo producto sí está definido se llaman *compatibles*.

Determinantes

Considere una matriz cuadrada de n, $A = [a_{ij}]$. El *determinante* de A se denota con $|A|$, det A, $|a_{ij}|$ o det $[a_{ij}]$. El lector quizás esté familiarizado con la definición de det A cuando $n \leq 3$. La definición general de det A es la siguiente:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Aquí, S_n consiste en todas las permutaciones σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y el signo $\sigma = \pm 1$, según sea σ una permutación par o impar.

Una de las principales propiedades de los determinantes es la siguiente:

PROPOSICIÓN 8.1: Sea $P = AB$, donde A y B son matrices cuadradas de orden n. Entonces,

$$\det P = (\det A)(\det B)$$

Inversas

La inversa de una matriz cuadrada A es una matriz que se denota con A^{-1}, tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

donde I es la matriz identidad. Una condición necesaria y suficiente para que A^{-1} exista es que det $A \neq 0$. Si det $A = 0$, entonces A se llama *singular*, de otro modo A recibe el nombre de *no singular*.

8.9 ELEMENTO DE LÍNEA Y TENSOR MÉTRICO

La diferencial de longitud de arco ds en coordenadas rectangulares (x, y, z) se obtiene a partir de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Al transformar a coordenadas curvilíneas generales (vea el problema 7.17), ésta se transforma en:

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\; du_p\, du_q$$

Tales espacios se denominan *espacios euclidianos tridimensionales*.

La generalización a un espacio N dimensional con coordenadas $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ es inmediata. En este espacio se define el *elemento de línea ds* como el que está dado por la forma cuadrática siguiente, llamada *forma métrica*,

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} g_{pq}\; dx^p\, dx^q$$

o bien, con el uso de la convención de suma,

$$ds^2 = g_{pq}\, dx^p dx^q$$

En el caso especial en que existe una transformación de coordenadas de x^j a $\bar{x}^k$ de modo que la forma métrica se transforma a $(d\,\bar{x}^1)^2 + (d\,\bar{x}^2)^2 + \cdots + (d\,\bar{x}^N)^2$ o $d\,\bar{x}^k\, d\,\bar{x}^k$, entonces el espacio se llama *espacio euclidiano N dimensional*. En el caso general, sin embargo, el espacio se llama *riemanniano*.

Las cantidades g_{pq} son las componentes de un tensor covariante de rango dos llamado *tensor métrico* o *tensor fundamental*. Es posible elegir, y siempre será así, que este tensor sea simétrico (consulte el problema 8.29).

Tensores conjugados o recíprocos

Sea que se denote con $g = |g_{pq}|$ el determinante con elementos g_{pq}, y supongamos que $g \neq 0$. Se define g^{pq} como:

$$g^{pq} = \frac{\text{cofactor de } g_{pq}}{g}$$

Entonces, g^{pq} es un tensor contravariante simétrico de rango dos llamado *tensor conjugado* o *recíproco* de g_{pq} (vea el problema 8.34). Se puede demostrar (vea el problema 8.33) que:

$$g^{pq} g_{rq} = \delta_r^p$$

8.10 TENSORES ASOCIADOS

Dado un tensor, es posible obtener otros tensores por medio de aumentar o disminuir índices. Por ejemplo, dado el tensor A_{pq}, si se aumenta el índice p obtenemos el tensor $A^p_{\cdot q}$, donde el punto indica la posición original del índice movido. Asimismo, al subir el índice q obtenemos $A^{pq}_{\cdot\cdot}$. Donde no hay lugar para la confusión es frecuente que se omitan los puntos; así, $A^{pq}_{\cdot\cdot}$ se puede escribir como A^{pq}. Estos tensores derivados se obtienen formando productos internos entre el tensor dado y el tensor métrico g_{pq} o su conjugado g^{pq}. Por ejemplo:

$$A^p_{\cdot q} = g^{rp} A_{rq}, \qquad A^{pq} = g^{rp} g^{sq} A_{rs}, \qquad A^p_{\cdot rs} = g_{rq} A^{pq}_{\cdot\cdot s}, \qquad A^{qm\cdot tk}_{\cdot\cdot n} = g^{pk} g_{sn} g^{rm} A^{q\cdot st}_{\cdot r\cdot\cdot p}$$

Esto queda claro si se interpreta la multiplicación por g^{rp} con el significado siguiente: sea $r = p$ (o $p = r$) en cualquier cosa que siga y *sube* este índice. De manera similar, se da a la multiplicación por g_{rq} el significado: sea $r = q$ (o $q = r$) en cualquier cosa que siga y baje este índice.

Todos los tensores obtenidos a partir de un tensor dado, por medio de formar productos internos con el tensor métrico y su conjugado se llaman *tensores asociados* del tensor dado. Por ejemplo, A^m y A_m son tensores asociados, las primeras son componentes contravariantes y las segundas son componentes covariantes. La relación entre ellas está dada por:

$$A_p = g_{pq}A^q \quad \text{o} \quad A^p = g^{pq}A_q$$

Para coordenadas rectangulares, $g_{pq} = 1$ si $p = q$, y 0 si $p \neq q$, de modo que $A_p = A^p$, lo que explica por qué en los capítulos anteriores no se hizo distinción entre las componentes contravariante y covariante de un vector.

8.11 SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Los símbolos siguientes:

$$[pq, r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} = g^{sr}[pq, r]$$

se llaman *símbolos de Christoffel de primer tipo y de segundo tipo*, respectivamente. En lugar de $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ se utilizan $\{pq, s\}$ y Γ^s_{pq}. No obstante, el último símbolo sugiere un carácter de tensor, lo que en general no es verdad.

Leyes de transformación de los símbolos de Christoffel

Suponga que se denota con una barra un símbolo en un sistema de coordenadas $\bar{x}^k$. Entonces,

$$\overline{[jk, m]} = [pq, r]\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

son las leyes de transformación de los símbolos de Christoffel, que muestran que no son tensores a menos que los segundos términos del lado derecho sean igual a cero.

8.12 LONGITUD DE UN VECTOR, ÁNGULO ENTRE VECTORES, GEODÉSICAS

La cantidad A^pB_p, que es el producto interno de A^p y de B_p, es un escalar análogo al producto escalar en coordenadas rectangulares. Se define la longitud L del vector A^p o A_q como:

$$L^2 = A^pA_p = g^{pq}A_pA_q = g_{pq}A^pA^q$$

El ángulo θ entre A^p y B_p se define por:

$$\cos\theta = \frac{A^pB_p}{\sqrt{(A^pA_p)(B^pB_p)}}$$

Geodésicas

La distancia s entre dos puntos t_1 y t_2 sobre una curva $x^r = x^r(t)$ en un espacio riemanniano está dada por:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}}\, dt$$

Esa curva en el espacio, que es la distancia mínima, se llama *geodésica* del espacio. Con el empleo del *cálculo de variaciones* (vea los problemas 8.50 y 8.51), las geodésicas las encontramos a partir de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix} \frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

donde s es el parámetro de la longitud de arco. Como ejemplos, las geodésicas sobre un plano son líneas rectas, mientras que las que están sobre una esfera son arcos de círculos máximos.

Componentes físicas

Las componentes físicas de un vector A^p o A_p, que se denota A_u, A_v, A_w, son las proyecciones del vector sobre las tangentes a las curvas coordenadas y en el caso de coordenadas ortogonales están dadas por

$$A_u = \sqrt{g_{11}}A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad A_v = \sqrt{g_{22}}A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad A_w = \sqrt{g_{33}}A^3 = \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

De manera similar, las componentes físicas de un tensor A^{pq} o A_{pq} están dadas por

$$A_{uu} = g_{11}A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}}, \quad A_{uv} = \sqrt{g_{11}g_{22}}A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad A_{uw} = \sqrt{g_{11}g_{33}}A^{13} = \frac{A_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}, \quad \text{etc.}$$

8.13 DERIVADA COVARIANTE

La derivada covariante de un tensor A_p con respecto de x^q se denota $A_{p,q}$ y está definida por

$$A_{p,q} \equiv \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$$

que es un tensor covariante de rango dos.

La derivada covariante de un tensor A^p con respecto de x^q se denota con $A^p_{,q}$ y está definida por

$$A^p_{,q} \equiv \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} A^s$$

la cual es un tensor mixto de rango dos.

Para sistemas rectangulares, los símbolos de Christoffel son igual a cero y las derivadas covariantes son las derivadas parciales usuales. Las derivadas covariantes de tensores también son tensores (vea el problema 8.52).

Los resultados anteriores se extienden a derivadas covariantes de tensores de mayor rango. Así,

$$\begin{aligned} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n,\,q} \equiv \; & \frac{\partial A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}}{\partial x^q} \\ & - \begin{Bmatrix} s \\ r_1 q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{s r_2\cdots r_n} - \begin{Bmatrix} s \\ r_2 q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1 s r_3\cdots r_n} - \cdots - \begin{Bmatrix} s \\ r_n q \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_{n-1} s} \\ & + \begin{Bmatrix} p_1 \\ qs \end{Bmatrix} A^{s p_2\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \begin{Bmatrix} p_2 \\ qs \end{Bmatrix} A^{p_1 s p_3\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \cdots + \begin{Bmatrix} p_m \\ qs \end{Bmatrix} A^{p_1\cdots p_{m-1} s}_{r_1\cdots r_n} \end{aligned}$$

es la derivada covariante de $A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}$ con respecto de x^q.

Las reglas de diferenciación covariante para sumas y productos de tensores son las mismas que las de la diferenciación ordinaria. Al llevar a cabo diferenciaciones, los tensores g_{pq}, g^{pq} y δ^p_q pueden ser tratados como constantes, puesto que sus derivadas covariantes son iguales a cero (consulte el problema 8.54). Debido a que las derivadas covariantes expresan tasas de cambio de cantidades físicas independientes de cualesquiera marcos de referencia, son de gran importancia para la expresión de leyes físicas.

8.14 SÍMBOLOS Y TENSORES DE PERMUTACIÓN

El símbolo e_{pqr} se define por medio de las relaciones siguientes:

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1, \quad e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1 \quad \text{y} \quad e_{pqr} = 0$$

si dos o más índices son iguales.

El símbolo e^{pqr} se define de la misma manera. Los símbolos e_{pqr} y e^{pqr} se llaman *símbolos de permutación* en el espacio tridimensional.

Además, se define

$$\epsilon_{pqr} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_{pqr}, \quad \epsilon^{pqr} = \sqrt{g} e^{pqr}$$

Puede demostrarse que ϵ_{pqr} y ϵ^{pqr} son los tensores covariante y contravariante, respectivamente, llamados *tensores de permutación* en el espacio tridimensional. Es posible hacer generalizaciones a dimensiones mayores.

8.15 FORMA TENSORIAL DEL GRADIENTE, LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL

1. **Gradiente.** Si Φ es un escalar o invariante, el gradiente de Φ está definido por

$$\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \Phi_{,p} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^p}$$

donde $\Phi_{,p}$ es la derivada covariante de Φ con respecto de x^p.

2. **Divergencia.** La divergencia de A^p es la contracción de su derivada covariante con respecto de x^q, es decir, es la contracción de $A^p_{,q}$. Entonces,

$$\text{div } A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} A^k\right)$$

3. **Rotacional.** El rotacional de A_p es $A_{p,q} - A_{q,p} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \dfrac{\partial A_q}{\partial x^p}$, que es un tensor de rango dos. El rotacional también se define como $-\epsilon^{pqr} A_{p,q}$.
4. **Laplaciano.** El laplaciano de Φ es la divergencia de grad Φ, es decir:

$$\nabla^2\Phi = \text{div } \Phi_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\right)$$

En el caso en que $g < 0$, $\sqrt{g}$ debe reemplazarse por $\sqrt{-g}$. Pueden incluirse ambos casos $g > 0$ y $g < 0$ si se escribe $\sqrt{|g|}$ en lugar de $\sqrt{g}$.

8.16 DERIVADA INTRÍNSECA O ABSOLUTA

La derivada intrínseca o absoluta de A_p a lo largo de una curva $x^q = x^q(t)$, denotada con $\dfrac{\delta A_p}{\delta t}$, se define como el producto interno de la derivada covariante de A_p y $\dfrac{dx^q}{dt}$, es decir, $A_{p,q} \dfrac{dx^q}{dt}$, y está dada por

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} \equiv \frac{dA_p}{dt} - \left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

En forma similar, se define

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} \equiv \frac{dA^p}{dt} + \left\{ \begin{matrix} p \\ qr \end{matrix} \right\} A^r \frac{dx^q}{dt}$$

Se dice que los vectores A_p o A^p se *mueven paralelamente* a lo largo de una curva si sus derivadas intrínsecas a lo largo de la curva son iguales a cero, respectivamente.

Las derivadas intrínsecas de tensores de mayor rango se definen de manera similar.

8.17 TENSORES RELATIVOS Y ABSOLUTOS

Un tensor $A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}$ se llama *tensor relativo de peso w* si sus componentes se transforman de acuerdo con la ecuación

$$\overline{A}^{q_1\cdots q_m}_{s_1\cdots s_n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right|^w A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} \frac{\partial \overline{x}^{q_1}}{\partial x^{p_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{q_m}}{\partial x^{p_m}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \overline{x}^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_n}}{\partial \overline{x}^{s_n}}$$

donde $J = \left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right|$ es el jacobiano de la transformación. Si $w = 0$, el tensor se llama *absoluto* y es el tipo de tensor que se ha analizado antes. Si $w = 1$, el tensor relativo se llama *tensor de densidad*. Las operaciones de adición, multiplicación, etc., de los tensores relativos son similares a las de los tensores absolutos. Por ejemplo, vea el problema 8.64.

PROBLEMAS RESUELTOS

Convención de suma

8.1. Escriba cada uno de los siguientes con el uso de la convención de suma.

a) $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x^N} dx^N$,

b) $\frac{d\overline{x}^k}{dt} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^N}\frac{dx^N}{dt}$,

c) $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \cdots + (x^N)^2$

d) $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$ y

e) $\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}\, dx^p dx^q$

Solución

a) $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} dx^j$, *b)* $\frac{d\overline{x}^k}{dt} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m}\frac{dx^m}{dt}$, *c)* $x^k x^k$,

d) $ds^2 = g_{kk}\, dx^k\, dx^k$, $N = 3$ y *e)* $g_{pq}\, dx^p\, dx^q$, $N = 3$

8.2. Escriba los términos en cada una de las siguientes sumas.

a) $a_{jk}x^k$, *b)* $A_{pq}A^{qr}$ y *c)* $\overline{g}_{rs} = g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^s}$, $N = 3$

Solución

a) $\sum_{k=1}^{N} a_{jk}x^k = a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \cdots + a_{jN}x^N$, *b)* $\sum_{q=1}^{N} A_{pq}A^{qr} = A_{p1}A^{1r} + A_{p2}A^{2r} + \cdots + A_{pN}A^{Nr}$ y

c)
$$\begin{aligned}
\overline{g}_{rs} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^s} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(g_{j1}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s} + g_{j2}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s} + g_{j3}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s}\right) \\
&= g_{11}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s} + g_{21}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s} + g_{31}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^s} \\
&\quad + g_{12}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s} + g_{22}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s} + g_{32}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^s} \\
&\quad + g_{13}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s} + g_{23}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s} + g_{33}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^s}
\end{aligned}$$

8.3. Suponga que x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, son coordenadas rectangulares. ¿Qué lugar geométrico, si hubiera alguno, está representado por cada una de las ecuaciones siguientes para $N = 2, 3$ y $N \geq 4$? Cuando sea necesario suponga que las funciones se evalúan en un solo valor, tienen derivadas continuas y son independientes.

a) $a_k x^k = 1$, donde a_k son constantes

b) $x^k x^k = 1$

c) $x^k = x^k(u)$

d) $x^k = x^k(u, v)$

Solución

a) Para $N = 2$, $a_1x^1 + a_2x^2 = 1$, una recta en dos dimensiones, es decir, una recta en un plano.
Para $N = 3$, $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 1$, un plano en tres dimensiones.
Para $N \geq 4$, $a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N = 1$, es un *hiperplano*.

b) Para $N = 2$, $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$, una circunferencia de radio unitario en el plano.
Para $N = 3$, $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, una esfera de radio unitario.
Para $N \geq 4$, $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^N)^2 = 1$, una *hiperesfera* de radio unitario.

c) Para $N = 2$, $x^1 = x^1(u)$, $x^2 = x^2(u)$, una curva plana con parámetro u.
Para $N = 3$, $x^1 = x^1(u)$, $x^2 = x^2(u)$, $x^3 = x^3(u)$, una curva en el espacio tridimensional.
Para $N \geq 4$, una curva en el espacio N dimensional.

d) Para $N = 2$, $x^1 = x^1(u, v)$, $x^2 = x^2(u, v)$, es una transformación de coordenadas, de (u, v) a (x^1, x^2).
Para $N = 3$, $x^1 = x^1(u, v)$, $x^2 = x^2(u, v)$, $x^3 = x^3(u, v)$, es una superficie tridimensional con parámetros u y v.
Para $N \geq 4$, una *hipersuperficie*.

Vectores y tensores contravariantes y covariantes

8.4. Escriba la ley de transformación para los tensores *a*) A^i_{jk}, *b*) B^{mn}_{ijk} y *c*) C^m.

Solución

a) $$\overline{A}^p_{qr} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}A^i_{jk}$$

Como ayuda para recordar la transformación, observe que las posiciones relativas de los índices p, q y r en el lado izquierdo de la transformación son los mismos que los que están en el lado derecho. Como estos índices están asociados con las coordenadas $\overline{x}$ y como los índices i, j y k están asociados, respectivamente, con los índices p, q y r, la transformación requerida se obtiene con facilidad.

b) $$\overline{B}^{pq}_{rst} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^m}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^s}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^t}B^{mn}_{ijk},$$

c) $$\overline{C}^p = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^m}C^m$$

8.5. Una cantidad $A(j, k, l, m)$, que es función de las coordenadas x^i, se transforma en otro sistema de coordenadas $\overline{x}^i$ de acuerdo con la regla

$$\overline{A}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^m}A(j, k, l, m)$$

a) ¿Esta cantidad es un tensor? *b*) Si lo es, escriba el tensor con una notación apropiada y *c*) dé el orden y rango contravariante y covariante.

Solución

a) Sí, *b*) A^{klm}_j y *c*) Contravariante de orden 3, covariante de orden 1 y rango $3 + 1 = 4$.

8.6. Determine si cada una de las cantidades siguientes es un tensor. Si lo son, diga si son contravariantes o covariantes y dé su rango *a*) dx^k y *b*) $\dfrac{\partial\phi(x^1, \ldots, x^N)}{\partial x^k}$.

Solución

a) Suponga la transformación de coordenadas $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, \ldots, x^N)$. Entonces, $d\bar{x}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k$, por lo que dx^k es un tensor contravariante de rango uno, o un vector contravariante. Observe que la ubicación del índice k es apropiado.

b) En la transformación $x^k = x^k(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$, ϕ es una función de x^k y por tanto $\bar{x}^j$, de modo que $\phi(x^1, \ldots, x^N) = \bar{\phi}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$, es decir, ϕ es un escalar o invariante (tensor de rango cero). Por la regla de la cadena de la diferenciación parcial, $\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}^j} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^j} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j} = \dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$, y $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ se transforma como $\bar{A}_j = \dfrac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}A_k$ Entonces, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ es un tensor covariante de rango uno o un vector covariante.

Observe que en $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$, el índice aparece en el denominador y por ello actúa como un subíndice que indica su carácter covariante. Hacemos referencia al tensor $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ o, en forma equivalente, al tensor con componentes $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$, como el *gradiente* de ϕ, que se escribe grad ϕ o $\nabla\phi$.

8.7. Un tensor covariante tiene componentes xy, $2y - z^2$, xz en coordenadas rectangulares. Encuentre sus componentes covariantes en coordenadas esféricas.

Solución

Sea que A_j denote las componentes covariantes en coordenadas rectangulares $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$. Entonces,

$$A_1 = xy = x^1x^2, \quad A_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2, \quad A_3 = x^1x^3$$

donde se debe tener cuidado para diferenciar entre superíndices y exponentes.

Sea que $\bar{A}_k$ denoten las componentes covariantes en coordenadas esféricas $\bar{x}^1 = r$, $\bar{x}^2 = \theta$ y $\bar{x}^3 = \phi$. Entonces,

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^k}A_j \tag{1}$$

Las ecuaciones de transformación entre los sistemas coordenados son:

$$x^1 = \bar{x}^1 \operatorname{sen}\bar{x}^2 \cos\bar{x}^3, \quad x^2 = \bar{x}^1 \operatorname{sen}\bar{x}^2 \operatorname{sen}\bar{x}^3 \quad \text{y} \quad x^3 = \bar{x}^1 \cos\bar{x}^2$$

Así, las ecuaciones (1) generan las componentes covariantes requeridas:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^1}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^1}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^1}A_3 \\
&= (\operatorname{sen}\bar{x}^2\cos\bar{x}^3)(x^1x^2) + (\operatorname{sen}\bar{x}^2\operatorname{sen}\bar{x}^3)(2x^2 - (x^3)^2) + (\cos\bar{x}^2)(x^1x^3) \\
&= (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)(r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi) \\
&\quad + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)(2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (\cos\theta)(r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi) \\
\bar{A}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^2}A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^2}A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^2}A_3 \\
&= (r\cos\theta\cos\phi)(r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi) \\
&\quad + (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi)(2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi - r^2\cos^2\theta) \\
&\quad + (-r\operatorname{sen}\theta)(r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3} A_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3} A_2 + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3} A_3 \\ &= (-r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)(r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi) \\ &\quad + (r \operatorname{sen}\theta \cos\phi)(2r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - r^2 \cos^2\theta) \\ &\quad + (0)(r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\phi)\end{aligned}$$

8.8. Demuestre que $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ no es un tensor aun cuando A_p es un tensor covariante de rango uno.

Solución

Por hipótesis, $\overline{A}_j = \dfrac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} A_r$. Al diferenciar con respecto a $\overline{x}^k$.

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_p = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_p = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_p$$

Como el segundo término de la derecha está presente, $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ no se transforma como debiera hacerlo un tensor. Después debe demostrarse la manera en que la suma de una cantidad apropiada a $\dfrac{\partial A_p}{\partial x^q}$ hace que el resultado sea un tensor (vea el problema 8.52).

8.9. Demuestre que la velocidad de un fluido en cualquier punto es un tensor contravariante de rango uno.

Solución

La velocidad de un fluido en cualquier punto tiene componentes $\dfrac{dx^k}{dt}$ en el sistema de coordenadas x^k. En el sistema de coordenadas $\overline{x}^j$ la velocidad es $\dfrac{d\overline{x}^j}{dt}$. Pero, según la regla de la cadena,

$$\frac{d\overline{x}^j}{dt} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}$$

y se concluye que la velocidad es un tensor contravariante de rango uno o un vector contravariante.

La delta de Kronecker

8.10. Evalúe *a)* $\delta^p_q A^{qr}_s$ y *b)* $\delta^p_q \delta^q_r$.

Solución

Como $\delta^p_q = 1$ si $p = q$ y 0 si $p \neq q$, se tiene:

a) $\delta^p_q A^{qr}_s = A^{pr}_s$ y *b)* $\delta^p_q \delta^q_r = \delta^p_r$

8.11. Demuestre que $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta^p_q$.

Solución

Si $p = q$, $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = 1$, ya que $x^p = x^q$. Si $p \neq q$, $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = 0$ puesto que x^p y x^q son independientes.

Entonces, $\dfrac{\partial x^p}{\partial x^q} = \delta^p_q$.

8.12. Demuestre que $\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_r$.

Solución

Las coordenadas x^p son funciones de las coordenadas $\bar{x}^q$, que a su vez son funciones de las coordenadas x^r. Entonces, según la regla de la cadena y el problema 8.11,

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^r} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r} = \delta^p_r$$

8.13. Sea $\bar{A}^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$. Demuestre que $A^q = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p$.

Solución

Se multiplica la ecuación $\bar{A}^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q$ por $\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$.

Entonces, $\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\bar{A}^p = \dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}A^q = \delta^r_q A^q = A^r$, según el problema 8.12. Al hacer $r = q$ obtenemos el resultado. Esto indica que en las ecuaciones de transformación para las componentes del tensor, pueden intercambiarse las cantidades que tienen barra y las que no la tienen, resultado que puede demostrarse de manera general.

8.14. Demuestre que δ^p_q es un tensor mixto de segundo rango.

Solución

Si δ^p_q es un tensor mixto de segundo rango, debe transformarse de acuerdo con la regla

$$\bar{\delta}^j_k = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta^p_q$$

El lado derecho es igual a $\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} = \delta^j_k$, según el problema 8.12. Como $\bar{\delta}^j_k = \delta^j_k = 1$ si $j = k$ y 0 si $j \neq k$, se concluye que δ^p_q es un tensor mixto de rango dos, lo que justifica la notación empleada.

Observe que en ocasiones se usa $\delta_{pq} = 1$ si $p = q$ y 0 si $p \neq q$ como la delta de Kronecker. Sin embargo, éste *no* es un tensor covariante de segundo rango, como la notación pareciera indicar.

Operaciones fundamentales con tensores

8.15. Suponga que A^{pq}_r y B^{pq}_r son tensores. Demuestre que su suma y diferencia son tensores.

Solución

Por hipótesis A^{pq}_r y B^{pq}_r son tensores, de modo que:

$$\bar{A}^{jk}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}A^{pq}_r \text{ y } \bar{B}^{jk}_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B^{pq}_r$$

Se suman,

$$(\bar{A}^{jk}_l + \bar{B}^{jk}_l) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A^{pq}_r + B^{pq}_r).$$

Se resta,

$$(\bar{A}^{jk}_l - \bar{B}^{jk}_l) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}(A^{pq}_r - B^{pq}_r).$$

Entonces, $A^{pq}_r + B^{pq}_r$ y $A^{pq}_r - B^{pq}_r$ son tensores del mismo rango y tipo que A^{pq}_r y B^{pq}_r.

8.16. Suponga que A_r^{pq} y B_t^s son tensores. Demuestre que $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq}B_t^s$ también es un tensor.

Solución

Debe demostrarse que C_{rt}^{pqs} es un tensor cuyas componentes se forman al tomar los productos de componentes de los tensores A_r^{pq} y B_t^s.. Puesto que A_r^{pq} y B_t^s son tensores,

$$\overline{A}_l^{jk} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A_r^{pq} \text{ y } \overline{B}_n^m = \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}B_t^s$$

Se multiplica y queda:

$$\overline{A}_l^{jk}\overline{B}_n^m = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}A_r^{pq}B_t^s$$

lo que demuestra que $A_r^{pq}B_t^s$ es un tensor de rango 5, con índices contravariantes p, q y s, e índices covariantes r, t, lo que garantiza la notación C_{rt}^{pqs}. Se denomina a $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq}B_t^s$ *producto externo* de A_r^{pq} y B_t^s.

8.17. Sea A_{rst}^{pq} un tensor. *a*) Elija $p = t$ y demuestre que A_{rsp}^{pq}, donde se emplea la convención de suma, es un tensor. ¿Cuál es su rango? *b*) Escoja $p = t$ y $q = s$, y de manera similar demuestre que A_{rqp}^{pq} es un tensor. ¿Qué rango tiene?

Solución

a) Como A_{rst}^{pq} es un tensor,

$$\overline{A}_{lmn}^{jk} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}A_{rst}^{pq} \quad (1)$$

Debe demostrarse que A_{rsp}^{pq} es un tensor. Coloque los índices correspondientes j y n iguales entre sí y sume sobre este índice. Entonces,

$$\overline{A}_{lmj}^{jk} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}A_{rst}^{pq} = \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}A_{rst}^{pq}$$
$$= \delta_p^t\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}A_{rst}^{pq} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m}A_{rsp}^{pq}$$

por lo que A_{rsp}^{pq} es un tensor de rango 3 y puede denotarse con B_{rs}^q. El proceso de colocar un índice contravariante igual a un índice covariante en un tensor y sumarlos se llama *contracción*. Con ese proceso se forma un tensor cuyo rango es inferior en dos al rango del tensor original.

b) Debe probarse que A_{rqp}^{pq} es un tensor. En la ecuación (1) del inciso *a*) se hace $j = n$ y $k = m$, y se suma sobre j y k, se tiene

$$\overline{A}_{lkj}^{jk} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}A_{rst}^{pq} = \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A_{rst}^{pq}$$
$$= \delta_p^t\delta_q^s\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A_{rst}^{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l}A_{rqp}^{pq}$$

lo que demuestra que A_{rqp}^{pq} es un tensor de rango uno y puede escribirse como C_r. Observe que al contraer dos veces el rango se redujo en 4.

8.18. Pruebe que la contracción del tensor A_q^p es un escalar o invariante.

Solución

Se tiene que

$$\overline{A}_k^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}A_q^p$$

Al hacer $j = k$ y sumar,

$$\overline{A}^j_j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}A^p_q = \delta^q_p A^p_q = A^p_p$$

Entonces, $\overline{A}^j_j = A^p_p$, y se concluye que A^p_p debe ser un invariante. Como A^p_q es un tensor de rango 2 y la contracción con respecto a un solo índice disminuye el rango dos, llegamos a definir un invariante como un tensor de rango cero.

8.19. Demuestre que la contracción del producto externo de los tensores A^p y B_q es un invariante.

Solución

Como A^p y B_q son tensores, $\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}A^p$, $\overline{B}_k = \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}B_q$. Entonces,

$$\overline{A}^j\overline{B}_k = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}A^p B_q$$

Por contracción (se hace $j = k$ y se suma):

$$\overline{A}^j\overline{B}_j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}A^p B_q = \delta^q_p A^p B_q = A^p B_p$$

por lo que A^pB_q es un invariante. El proceso de multiplicar tensores (multiplicación externa) para luego contraer se llama *multiplicación interna*, y el resultado recibe el nombre de *producto interno*. Como A^pB_q es un escalar, con frecuencia se denomina *producto escalar* de los vectores A^p y B_q.

8.20. Demuestre que cualquier producto interno de los tensores A^p_r y B^{qs}_t es un tensor de rango tres.

Solución

El producto externo de A^p_r y $B^{qs}_t = A^p_r B^{qs}_t$.

Se contrae con respecto de los índices p y t, es decir, sea $p = t$ y se suma. Debe demostrarse que el producto interno resultante, representado por $A^p_r B^{qs}_p$ es un tensor de rango tres.

Por hipótesis, A^p_r y B^{qs}_t son tensores; entonces,

$$\overline{A}^j_k = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}A^p_r, \quad \overline{B}^{lm}_n = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^n}B^{qs}_t$$

Al multiplicar, con $j = n$, y sumar, se tiene:

$$\begin{aligned}\overline{A}^j_k\overline{B}^{lm}_j &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^j}A^p_r B^{qs}_t \\ &= \delta^t_p \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}A^p_r B^{qs}_t \\ &= \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^s}A^p_r B^{qs}_p\end{aligned}$$

lo que demuestra que $A^p_r B^{qs}_p$ es un tensor de rango tres. Al contraer con respecto de q y r o s y r en el producto $A^p_r B^{qs}_t$, puede demostrarse en forma similar que cualquier producto interno es un tensor de rango tres.

Otro método. El producto externo de dos tensores es un tensor cuyo rango es la suma de los rangos de los tensores dados. Entonces, $A^p_r B^{qs}_t$ es un tensor de rango $3 + 2 = 5$. Como una contracción da como resultado un tensor cuyo rango es inferior en dos que el del tensor dado, se concluye que cualquier contracción $A^p_r B^{qs}_t$ es un tensor de rango $5 - 2 = 3$.

8.21. Sea $X(p, q, r)$ una cantidad tal que $X(p, q, r)B^{qn}_r = 0$ para un tensor arbitrario B^{qn}_r. Demuestre que $X(p, q, r) = 0$ de manera idéntica.

Solución

Como B^{qn}_r es un tensor arbitrario, se escoge un componente particular (digamos uno con $q = 2$, $r = 3$) diferente de cero, mientras que todas las demás componentes son iguales a cero. Entonces, $X(p, 2, 3)B^{2n}_3 = 0$, de modo que $X(p, 2, 3) = 0$ puesto que $B^{2n}_3 \neq 0$. Con un razonamiento similar para todas las combinaciones posibles de q y r, se tiene que $X(p, q, r) = 0$, de lo que se concluye el resultado.

8.22. Suponga en el sistema de coordenadas x^i, una cantidad $A(p, q, r)$ es $A(p, q, r)B_r^{qs} = C_p^s$, donde B_r^{qs} es un tensor arbitrario y C_p^s es un tensor. Demuestre que $A(p, q, r)$ es un tensor.

Solución

En las coordenadas transformadas $\bar{x}^i$, $\bar{A}(j, k, l)\bar{B}_l^{km} = \bar{C}_j^m$.

Entonces, $\bar{A}(j, k, l)\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}B_r^{qs} = \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}C_p^s = \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p, q, r)B_r^{qs}$

o bien:

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p, q, r)\right]B_r^{qs} = 0$$

La multiplicación interna por $\dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m}$ (es decir, al multiplicar por $\dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^t}$ para luego contraer con $t = m$) produce

$$\delta_s^n\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p, q, r)\right]B_r^{qs} = 0$$

o bien:

$$\left[\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p, q, r)\right]B_r^{qn} = 0.$$

Como B_r^{qn} es un tensor arbitrario, según el problema 8.21 se tiene que:

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l}\bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}A(p, q, r) = 0$$

La multiplicación interna por $\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}$ produce

$$\delta_m^k\delta_l^n\bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p, q, r) = 0$$

o bien:

$$\bar{A}(j, m, n) = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r}A(p, q, r)$$

lo que demuestra que $A(p, q, r)$ es un tensor y justifica el uso de la notación A_{pq}^r.

En este problema se ha establecido el caso especial de la *ley del cociente*, que dice que si un producto interno de una cantidad X con un tensor arbitrario B es un tensor C, entonces X es un tensor.

Tensores simétricos y simétricos oblicuos

8.23. Suponga que un tensor A_{st}^{pqr} es simétrico (simétrico-oblicuo) con respecto de los índices p y q en un sistema de coordenadas. Demuestre que permanece simétrico (simétrico oblicuo) con respecto de p y q en cualquier sistema de coordenadas.

Solución

Como sólo están involucrados los índices p y q, debemos probar los resultados para B^{pq}. Si B^{pq} es simétrico, $B^{pq} = B^{qp}$. Entonces,

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp} = \bar{B}^{kj}$$

y B^{pq} permanece simétrico en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$.

Si B^{pq} es simétrico oblicuo, $B^{pq} = -B^{qp}$. Entonces,

$$\bar{B}^{jk} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}B^{pq} = -\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p}B^{qp} = -\bar{B}^{kj}$$

y B^{pq} permanece simétrico oblicuo en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$.

Los resultados anteriores son válidos, por supuesto, para otros tensores simétricos (simétricos oblicuos).

8.24. Demuestre que todo tensor puede expresarse como la suma de dos tensores, uno de los cuales es simétrico y el otro simétrico oblicuo en un par de índices covariantes o contravariantes.

Solución

Considere, por ejemplo, el tensor B^{pq}. Se tiene:

$$B^{pq} = \tfrac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) + \tfrac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp})$$

Pero $R^{pq} = \tfrac{1}{2}(B^{pq} + B^{qp}) = R^{qp}$ es simétrico, y $S^{pq} = \tfrac{1}{2}(B^{pq} - B^{qp}) = -S^{qp}$ es simétrico oblicuo. Con un razonamiento similar, se observa que el resultado es verdadero para cualquier tensor.

8.25. Sea $\Phi = a_{jk}A^jA^k$. Demuestre que siempre es posible escribir $\Phi = b_{jk}A^jA^k$, donde b_{jk} es simétrico.

Solución

$$\Phi = a_{jk}A^jA^k = a_{kj}A^kA^j = a_{kj}A^jA^k$$

Entonces,

$$2\Phi = a_{jk}A^jA^k + a_{kj}A^jA^k = (a_{jk} + a_{kj})A^jA^k \quad \text{y} \quad \Phi = \tfrac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})A^jA^k = b_{jk}A^jA^k$$

donde $b_{jk} = \tfrac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) = b_{kj}$ es simétrico.

Matrices

8.26. Escriba la suma $S = A + B$, la diferencia $D = A - B$ y los productos $P = AB$ y $Q = BA$, de las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

$$S = A + B = \begin{bmatrix} 3+2 & 1+0 & -2-1 \\ 4-4 & -2+1 & 3+2 \\ -2+1 & 1-1 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 3-2 & 1-0 & -2+1 \\ 4+4 & -2-1 & 3-2 \\ -2-1 & 1+1 & -1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = AB = \begin{bmatrix} (3)(2)+(1)(-4)+(-2)(1) & (3)(0)+(1)(1)+(-2)(-1) & (3)(-1)+(1)(2)+(-2)(0) \\ (4)(2)+(-2)(-4)+(3)(1) & (4)(0)+(-2)(1)+(3)(-1) & (4)(-1)+(-2)(2)+(3)(0) \\ (-2)(2)+(1)(-4)+(-1)(1) & (-2)(0)+(1)(1)+(-1)(-1) & (-2)(-1)+(1)(2)+(-1)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 19 & -5 & -8 \\ -9 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = BA = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -3 \\ -12 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que $AB \neq BA$, es decir, que la multiplicación de matrices generalmente no es conmutativa.

8.27. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Demuestre que $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

Solución

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$. Entonces, $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$.

Así, $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Por tanto, $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$. Sin embargo, $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.

8.28. Exprese en notación matricial las ecuaciones de transformación para: *a*) un vector covariante y *b*) un tensor contravariante de rango dos, si se supone $N = 3$.

Solución

a) Las ecuaciones de transformación $\bar{A}_p = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$ pueden escribirse así

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

en términos de vectores columna, o en forma equivalente en términos de vectores renglón

$$[\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 \ \bar{A}_3] = [A_1 \ A_2 \ A_3] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix}$$

b) Es posible escribir las ecuaciones de transformación $\bar{A}^{pr} = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs}$ como

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Pueden hacerse ampliaciones de estos resultados para $N > 3$. Sin embargo, para tensores de rango mayor la notación matricial no sirve.

El elemento de línea y el tensor métrico

8.29. Suponga que $ds^2 = g_{jk}\,dx^j\,dx^k$ es un invariante. Demuestre que g_{jk} es un tensor covariante simétrico de rango dos.

Solución

Según el problema 8.25, $\Phi = ds^2$, $A^j = dx^j$ y $A^k = dx^k$; se concluye que g_{jk} puede escogerse como simétrico. Asimismo, como ds^2 es un invariante,

$$\overline{g}_{pq}\,d\overline{x}^p\,d\overline{x}^q = g_{jk}\,dx^j dx^k = g_{jk}\,\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\,d\overline{x}^p\,\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}\,d\overline{x}^q = g_{jk}\,\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\,\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}\,d\overline{x}^p\,d\overline{x}^q$$

Por lo que $\overline{g}_{pq} = g_{jk}\dfrac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\dfrac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^q}$ y g_{jk} es un tensor simétrico covariante de rango dos, llamado *tensor métrico*.

8.30. Determine el tensor métrico en coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

Solución

a) Igual que en el problema 7.7, $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\phi^2 + dz^2$.
Si $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$, entonces $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{23} = g_{32} = 0$, $g_{31} = g_{13} = 0$.

En forma matricial, el tensor métrico puede escribirse como: $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Como en el problema 7.8*a*), $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2$.

Si $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, el tensor métrico puede escribirse como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$

En general, para coordenadas ortogonales, $g_{jk} = 0$ para $j \neq k$.

8.31. *a*) Exprese el determinante $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$ en términos de los elementos del segundo renglón y sus cofactores correspondientes. *b*) Demuestre que $g_{jk}G(j, k) = g$, donde $G(j, k)$ es el cofactor de g_{jk} en g, y donde la suma se hace sólo sobre k.

Solución

a) El cofactor de g_{jk} es el determinante obtenido a partir de g por medio de (1), al eliminar el renglón y la columna en la que aparece g_{jk}, y (2) con la asociación del signo $(-1)^{j+k}$ a dicho determinante. Entonces,

$$\text{Cofactor de } g_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{Cofactor de } g_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} \text{ y}$$

$$\text{Cofactor de } g_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

Estos cofactores se denotan como $G(2, 1)$, $G(2, 2)$ y $G(2, 3)$, respectivamente. Entonces, según un principio elemental de los determinantes,

$$g_{21}G(2, 1) + g_{22}G(2, 2) + g_{23}G(2, 3) = g$$

b) Al aplicar el resultado del inciso *a*) a cualquier renglón o columna se tiene que $g_{jk}G(j, k) = g$, donde la suma se realiza solamente sobre k. Estos resultados se cumplen cuando $g = |g_{jk}$ es un determinante de N-ésimo orden.

8.32. *a*) Demuestre que $g_{21}G(3, 1) + g_{22}G(3, 2) + g_{23}G(3, 3) = 0$.
b) Pruebe que $g_{jk}G(p, k) = 0$ si $j \neq p$.

Solución

a) Considere el determinante $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}$, que es igual a cero porque los últimos dos renglones son idénticos.

Al desarrollar de acuerdo con los elementos del último renglón se tiene que

$$g_{21}G(3, 1) + g_{22}G(3, 2) + g_{23}G(3, 3) = 0$$

b) Al igualar los elementos correspondientes de dos renglones (o columnas) cualesquiera, es posible demostrar, como en el inciso *a*), que $g_{jk}G(p, k) = 0$ si $j \neq p$. Este resultado también se cumple para determinantes de N-ésimo orden.

8.33. Se define $g^{jk} = \dfrac{G(j, k)}{g}$ donde $G(j, k)$ es el cofactor de g_{jk} en el determinante $g = |g_{jk}| \neq 0$. Demuestre que $g_{jk}g^{pk} = \delta_j^p$.

Solución

De acuerdo con el problema 8.31, $g_{jk}\dfrac{G(j, k)}{g} = 1$, o bien $g_{jk}g^{jk} = 1$, donde la suma se realiza sólo sobre k.

Por el problema 8.32, $g_{jk}\dfrac{G(p, k)}{g} = 0$, o $g_{jk}g^{pk} = 0$, si $p \neq j$.

Entonces, $g_{jk}g^{pk}$ ($= 1$ si $p = j$ y 0 si $p \neq j$) $= \delta_j^p$.

Se ha empleado la notación g^{jk} aunque aún no se haya demostrado que esté garantizada (es decir, que g^{jk} es un tensor contravariante de rango dos). Esto se establece en el problema 8.34. Observe que el cofactor ha sido escrito como $G(j, k)$ y no como G^{jk}, puesto que es posible demostrar que no es un tensor en el sentido habitual. No obstante, puede probarse que es un *tensor relativo* de peso dos que es contravariante y con dicha ampliación del concepto de tensor, la notación G^{jk} queda justificada (vea el problema complementario 8.152).

8.34. Demuestre que g^{jk} es un tensor simétrico contravariante de rango dos.

Solución

Como g_{jk} es simétrico, $G(j, k)$ es simétrico, por lo que $g^{jk} = G(j, k)/g$ es simétrico.

Si B^p es un vector arbitrario contravariante, $B_q = g_{pq}B^p$ es un vector arbitrario covariante. Al multiplicar por g^{jq},

$$g^{jq}B_q = g^{jq}g_{pq}B^p = \delta_p^j B^p = B^j, \quad \text{o bien} \quad g^{jq}B_q = B^j$$

Como B_q es un vector arbitrario, g^{iq} es un tensor contravariante de rango dos, por la aplicación de la ley del cociente. El tensor g^{jk} se llama *tensor métrico conjugado*.

8.35. Determine el tensor métrico conjugado en coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

Solución

a) Del problema 8.30*a*), $g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$

$$g^{11} = \frac{\text{cofactor de } g_{11}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad g^{33} = \frac{\text{cofactor de } g_{33}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{\text{cofactor de } g_{22}}{g} = \frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}, \qquad g^{12} = \frac{\text{cofactor de } g_{12}}{g} = -\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De manera similar, $g^{jk} = 0$ si $j \neq k$. El tensor métrico conjugado puede representarse en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Del problema 8.30*b*), $g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{vmatrix} = r^4 \operatorname{sen}^2\theta$

Igual que en el inciso *a*), encontramos que $g^{11} = 1$, $g^{22} = \dfrac{1}{r^2}$, $g^{33} = \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}$ y $g^{jk} = 0$ para $j \neq k$, y en forma matricial esto se escribe así

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

8.36. Encuentre: *a*) g y *b*) g^{jk} correspondiente a $ds^2 = 5(dx^1)^2 + 3(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6\, dx^1 dx^2 + 4\, dx^2 dx^3$.

Solución

a) $g_{11} = 5$, $g_{22} = 3$, $g_{33} = 4$, $g_{12} = g_{21} = -3$, $g_{23} = g_{32} = 2$, $g_{13} = g_{31} = 0$.

Entonces, $g = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

b) Los cofactores $G(j, k)$ de g_{jk} son

$G(1, 1) = 8$, $G(2, 2) = 20$, $G(3, 3) = 6$, $G(1, 2) = G(2, 1) = 12$, $G(2, 3) = G(3, 2) = -10$, $G(1, 3) = G(3, 1) = -6$

Entonces, $g^{11} = 2$, $g^{22} = 5$, $g^{33} = 3/2$, $g^{12} = g^{21} = 3$, $g^{23} = g^{32} = -5/2$, $g^{13} = g^{31} = -3/2$
Observe que el producto de las matrices (g_{jk}) y (g^{jk}) es igual a la matriz identidad, **I**, es decir:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensores asociados

8.37. Sea $A_j = g_{jk}A^k$. Demuestre que $A^k = g^{jk}A_j$.

Solución

Multiplique $A_j = g_{jk}A^k$ por g^{jq}. Entonces, $g^{jq}A_j = g^{jq}g_{jk}A^k = \delta_k^q A^k = A^q$, es decir $A^q = g^{jq}A_j$ o bien $A^k = g^{jk}A_j$.

Los tensores de rango uno, A_j y A^k se llaman *asociados*. Representan las componentes covariante y contravariante de un vector.

8.38. *a*) Demuestre que $L^2 = g_{pq}A^pA^q$ es un invariante. *b*) Demuestre que $L^2 = g^{pq}A_pA_q$.

Solución

a) Sean A_j y A^k las componentes covariante y contravariante de un vector. Entonces,

$$\overline{A}_p = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p} A_j, \quad \overline{A}^q = \frac{\partial \overline{x}^q}{\partial x^k} A^k$$

y

$$\overline{A}_p\overline{A}^p = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^p}\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial \overline{x}^k}A_jA^k = \delta^j_k A_jA^k = A_jA^j$$

de modo que A_jA^j es un invariante que llamaremos L^2. Entonces, puede escribirse

$$L^2 = A_jA^j = g_{jk}A^kA^j = g_{pq}A^pA^q$$

b) Del inciso *a*): $L^2 = A_jA^j = A_jg^{kj}A_k = g^{jk}A_jA_k = g^{pq}A_pA_q$.
La cantidad escalar o invariante $L = \sqrt{A_pA^p}$ se llama magnitud o longitud del vector con componentes covariante A_p y contravariante A^p.

8.39. *a*) Suponga que A^p y B^q son vectores. Demuestre que $g_{pq}A^pB^q$ es un invariante.

b) Demuestre que $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ es un invariante.

Solución

a) Según el problema 8.38, $A^pB_p = A^pg_{pq}B^q = g_{pq}A^pB^q$ es un invariante.

b) Como A^pA_p y B^qB_q son invariantes, $\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}$ es un invariante, por lo que $\dfrac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$ es un invariante. Se define

$$\cos\theta = \frac{g_{pq}A^pB^q}{\sqrt{(A^pA_p)(B^qB_q)}}$$

como el *coseno del ángulo entre los vectores* A^p y B^q. Si $g_{pq}A^pB^q = A^pB_p = 0$, los vectores se llaman *ortogonales*.

8.40. Exprese la relación entre los tensores asociados:

a) A^{jkl} y A_{pqr}, *b*) $A^{\cdot k}_{j\cdot l}$ y A^{qkr}, *c*) $A^{p\cdot rs\cdot}_{\cdot q\cdot\cdot t}$ y $A^{\cdots sl}_{jqk}$.

Solución

a) $A^{jkl} = g^{jp}g^{kq}g^{lr}A_{pqr}$ o $A_{pqr} = g_{jp}g_{kq}g_{lr}A^{jkl}$

b) $A^{\cdot k}_{j\cdot l} = g_{jq}g_{lr}A^{qkr}$ o $A^{qkr} = g^{jq}g^{lr}A^{\cdot k}_{j\cdot l}$

c) $A^{p\cdot rs\cdot}_{\cdot q\cdot\cdot t} = g^{pj}g^{rk}g_{tl}A^{\cdots sl}_{jqk}$ o $A^{\cdots sl}_{jqk} = g_{pj}g_{rk}g^{tl}A^{p\cdot rs\cdot}_{\cdot q\cdot\cdot t}$

8.41. Demuestre que los ángulos θ_{12}, θ_{23} y θ_{31} entre las curvas coordenadas en un sistema de coordenadas tridimensional están dados por

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \qquad \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \qquad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

Solución

A lo largo de la curva coordenada x^1, $x^2 =$ constante y $x^3 =$ constante.

Entonces, de la forma métrica, $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2$ o bien $\dfrac{dx^1}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}$.

Así, un vector tangente unitario a lo largo de la curva x^1 es $A^r_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta^r_1$. De manera similar, los vectores unitarios tangentes a lo largo de las curvas coordenadas x^2 y x^3 son: $A^r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta^r_2$ y $A^r_3 = \dfrac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta^r_3$.

El coseno del ángulo θ_{12} entre A_1^r y A_2^r está dado por

$$\cos\theta_{12} = g_{pq}A_1^pA_2^q = g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^p\delta_2^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Los otros resultados se obtienen de manera similar.

8.42. Demuestre que para un sistema de coordenadas ortogonal, $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$.

Solución

Esto se concluye de inmediato del problema 8.41 si se hace $\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 90°$. Del hecho de que $g_{pq} = g_{qp}$, también se concluye que $g_{21} = g_{32} = g_{13} = 0$.

8.43. Demuestre que para un sistema ortogonal de coordenadas, $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}}$, $g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}}$, $g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}}$.

Solución

Del problema 8.33, $g^{pr}g_{rq} = \delta_q^p$

Si $p = q = 1$, $g^{1r}g_{r1} = 1$ o $g^{11}g_{11} + g^{12}g_{21} + g^{13}g_{31} = 1$.

Entonces, con el uso del resultado del problema 8.42, $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}}$.

En forma similar, si $p = q = 2$, $g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}}$; y si $p = q = 3$, $g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}}$.

Símbolos de Christoffel

8.44. Demuestre que: *a*) $[pq, r] = [qp, r]$, *b*) $\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} s \\ qp \end{matrix}\right\}$, *c*) $[pq, r] = g_{rs}\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}$.

Solución

a) $[pq, r] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \dfrac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} + \dfrac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} - \dfrac{\partial g_{qp}}{\partial x^r}\right) = [qp, r]$.

b) $\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\} = g^{sr}[pq, r] = g^{sr}[qp, r] = \left\{\begin{matrix} s \\ qp \end{matrix}\right\}$

c) $g_{ks}\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\} = g_{ks}g^{sr}[pq, r] = \delta_k^r[pq, r] = [pq, k]$

o bien:

$[pq, k] = g_{ks}\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}$; es decir: $[pq, r] = g_{rs}\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}$.

Observe que la multiplicación de $[pq, r]$ por g^{sr}, tiene el efecto de reemplazar r por s, lo que sube el índice y sustituye los corchetes por llaves para generar $\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}$. De modo similar, la multiplicación de $\left\{\begin{matrix} s \\ pq \end{matrix}\right\}$ por g_{rs} o g_{sr} tiene el efecto de sustituir s por r, lo que baja el índice y cambia las llaves por corchetes, lo que produce $[pq, r]$.

8.45. Demuestre lo siguiente

a) $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = [pm, q] + [qm, p]$, *b*) $\dfrac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\left\{\begin{matrix} q \\ mn \end{matrix}\right\} - g^{qn}\left\{\begin{matrix} p \\ mn \end{matrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{matrix} p \\ pq \end{matrix}\right\} = \dfrac{\partial}{\partial x^q}\ln\sqrt{g}$

Solución

a) $[pm, q] + [qm, p] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \dfrac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \dfrac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \dfrac{\partial g_{mp}}{\partial x^q} - \dfrac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right) = \dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$

b) $\dfrac{\partial}{\partial x^m}\left(g^{jk}g_{ij}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k) = 0$. Entonces

$$g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij} = 0 \quad \text{o} \quad g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

Al multiplicar por g^{ir},

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$$

es decir:

$$\delta_j^r\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}([im,\ j] + [jm,\ i])$$

o bien:

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = -g^{ir}\begin{Bmatrix} k \\ im \end{Bmatrix} - g^{jk}\begin{Bmatrix} r \\ jm \end{Bmatrix}$$

y el resultado surge al sustituir r, k, i y j por p, q, n y n, respectivamente.

c) Del problema 8.31, $g = g_{jk}G(j,\ k)$ (sólo se suma sobre k).

Como $G(j, k)$ no contiene g_{jk} de manera explícita, $\dfrac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,\ r)$. Entonces, al sumar sobre j y r,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x^m} &= \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j, r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} \\ &= gg^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = gg^{jr}([jm,\ r] + [rm,\ j]) \\ &= g\left(\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ rm \end{Bmatrix}\right) = 2g\begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} \quad \text{o bien:} \quad \begin{Bmatrix} j \\ jm \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^m}\ln\sqrt{g}$$

El resultado surge al sustituir j por p y m por q.

8.46. Obtenga las leyes de transformación para los símbolos de Christoffel de *a*) el primer tipo y *b*) el segundo tipo.

Solución

a) Como $\bar{g}_{jk} = \dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq}$,

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k}g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}g_{pq} \tag{1}$$

La permutación circular de los índices j, k, m y p, q, r genera:

$$\frac{\partial \bar{g}_{km}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m}g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}g_{qr} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}g_{rp} \tag{3}$$

Al restar la ecuación (1) de la suma de la (2) más la (3), y multiplicar por $\frac{1}{2}$, con el uso de la definición de los símbolos de Christoffel del primer tipo obtenemos que:

$$\overline{[jk,\, m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}[pq,\, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m} g_{pq} \qquad (4)$$

b) Al multiplicar la ecuación (4) por $\bar{g}^{nm} = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}$, obtenemos:

$$\bar{g}^{nm}\overline{[jk,\, m]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st}[pq,\, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}$$

Entonces,

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta_t^r g^{st}[pq,\, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\delta_t^q g^{st} g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$$

como $\delta_t^r g^{st}[pq,\, r] = g^{sr}[pq,\, r] = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ y $\delta_t^q g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta_p^s$.

8.47. Demuestre que $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ pq \end{Bmatrix}$.

Solución

Del problema 8.46*b*), $\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p}$.

Al multiplicar por $\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}$,

$$\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\delta_s^m\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\delta_p^m$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

Al resolver para $\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$, se llega al resultado.

8.48. Evalúe los símbolos de Christoffel de *a*) el primer tipo y *b*) el segundo tipo, para espacios en los que $g_{pq} = 0$ si $p \neq q$.

Solución

a) Si $p = q = r$, $\quad [pq,\, r] = [pp,\, p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$.

Si $p = q \neq r$, $\quad [pq,\, r] = [pp,\, r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$.

Si $p = r \neq q$, $\quad [pq,\, r] = [pq,\, p] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$.

Si p, q y r son distintas, $[pq,\, r] = 0$.

Aquí no se utilizó la convención de la suma.

b) Según el problema 8.43, $g^{jj} = \dfrac{1}{g_{jj}}$ (no sumada). Entonces,

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = g^{sr}[pq,\, r] = 0 \text{ si } r \neq s, \text{ y } g^{ss}[pq,\, s] = \frac{[pq,\, s]}{g_{ss}} \text{ (no sumada) si } r = s.$$

De acuerdo con el inciso *a*):

Si $p = q = s$, $\quad \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p \\ pp \end{matrix} \right\} = \dfrac{[pp,\, p]}{g_{pp}} = \dfrac{1}{2g_{pp}} = \dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^p} \ln g_{pp}.$

Si $p = q \neq s$, $\quad \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} s \\ pp \end{matrix} \right\} = \dfrac{[pp,\, s]}{g_{ss}} = -\dfrac{1}{2g_{ss}}\dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^s}.$

Si $p = s \neq q$, $\quad \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p \\ pq \end{matrix} \right\} = \dfrac{[pq,\, p]}{g_{pp}} = \dfrac{1}{2g_{pp}}\dfrac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x^q} \ln g_{pp}.$

Si p, q y s son distintas, $\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = 0.$

8.49. Determine los símbolos de Christoffel del segundo tipo en coordenadas: *a*) rectangulares, *b*) cilíndricas y *c*) esféricas.

Solución

Pueden usarse los resultados del problema 8.48, ya que para coordenadas ortogonales $g_{pq} = 0$ si $p \neq q$.

a) En coordenadas rectangulares, $g_{pp} = 1$ de modo que $\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = 0.$

b) En coordenadas cilíndricas, $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$, según el problema 8.30*a*) se tiene $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$. Los únicos símbolos de Christoffel del segundo tipo distintos de cero pueden ocurrir donde $p = 2$. Éstos son los siguientes:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = -\rho,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) = \frac{1}{\rho}$$

c) En coordenadas esféricas, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, según el problema 8.30*b*) se tiene que $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$. Los únicos símbolos de Christoffel del segundo tipo que son diferentes de cero ocurren donde $p = 2$ o 3. Éstos son:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -r$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = -r \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = -\operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = \frac{1}{r}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = \cot \theta$$

Geodésicas

8.50. Demuestre que una condición necesaria para que $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x,\ \dot{x})\ dt$ sea un extremo (máximo o mínimo) es que $\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$

Solución

Hagamos que $x = X(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ sea la curva que hace que I sea un extremo. Entonces, $x = X(t) + \epsilon\eta(t)$, donde ϵ es independiente de t, es una curva vecina que pasa por t_1 y t_2 de modo que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. El valor de I para la curva vecina es:

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ X + \epsilon\eta,\ \dot{X} + \epsilon\dot{\eta})\ dt$$

Éste es un extremo para $\epsilon = 0$. Una condición necesaria para que sea así es que $\left.\dfrac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$. Pero por diferenciación bajo el signo de la integral, si suponemos que esto es válido,

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right) dt = 0$$

que puede escribirse como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x}\eta\ dt + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right) dt = 0$$

Como η es arbitrario, el integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$

El resultado se extiende con facilidad a la integral $\int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x^1,\ \dot{x}^1,\ x^2,\ \dot{x}^2, \ldots,\ x^N,\ \dot{x}^N)\ dt$, lo que produce:

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0$$

que se llaman *ecuaciones de Euler* o *de Lagrange* (vea también el problema 8.73).

8.51. Demuestre que las geodésicas en un espacio de Riemann están dadas por $\dfrac{d^2x^r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\dfrac{dx^p}{ds}\dfrac{dx^q}{ds} = 0.$

Solución

Debe determinarse el extremo de $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$ con el empleo de las ecuaciones de Euler (problema 8.50) con $F = \sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$. Se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-1/2}2g_{pk}\dot{x}^p$$

Al usar $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$, las ecuaciones de Euler pueden escribirse de este modo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right) - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q = 0$$

o bien,

$$g_{pk}\ddot{x}^p + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q = \frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

Al escribir $\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q$ esta ecuación se convierte en:

$$g_{pk}\ddot{x}^p + [pq,\, k]\dot{x}^p\dot{x}^q = \frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}$$

Si se utiliza la longitud de arco como parámetro, $\dot{s} = 1$, $\ddot{s} = 0$, y la ecuación se transforma en:

$$g_{pk}\frac{d^2x^p}{ds^2} + [pq,\, k]\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

Si se multiplica por g^{rk} obtenemos:

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

La derivada covariante

8.52. Suponga que A_p y A^p son tensores. Demuestre que *a*) $A_{p,q} \equiv \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A_s$ y que *b*) $A^p_{,q} \equiv \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} A^s$ son tensores.

Solución

a) Como $\overline{A}_j = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} A_r$,

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} A_r \tag{1}$$

Del problema 8.47,

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} = \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n} - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}$$

Al sustituirla en la ecuación (1),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^n}A_r - \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}A_r \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\overline{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{\partial \overline{A}_j}{\partial \overline{x}^k} - \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}}\overline{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\right)$$

y $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s$ es un tensor covariante de segundo rango, llamado *derivada covariante* de A_p con *respecto de* x^q, y se escribe $A_{p,q}$.

b) Como $\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}A^r$,

$$\frac{\partial \overline{A}^j}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial A^r}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^r \partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k}A^r \tag{2}$$

Del problema 8.47, al intercambiar las coordenadas x y $\overline{x}$,

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^j}{\partial x^r \partial x^t} = \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^n} - \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^t}\overline{\begin{Bmatrix} i \\ il \end{Bmatrix}}$$

Al sustituir en la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{A}^j}{\partial\overline{x}^k} &= \frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}A^r - \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r \\ &= \frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} n \\ rt \end{Bmatrix}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^k}A^r - \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^r}\delta^l_k\overline{\begin{Bmatrix} j \\ il \end{Bmatrix}}A^r \\ &= \frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ sq \end{Bmatrix}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}A^s - \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}}\overline{A}^i\end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{\partial\overline{A}^j}{\partial\overline{x}^k} + \overline{\begin{Bmatrix} j \\ ki \end{Bmatrix}}\overline{A}^i = \frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s\right)$$

y $\dfrac{\partial A^p}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix}A^s$ es un tensor mixto de segundo rango, llamado *derivada covariante de A^p con respecto de x^q*, y que se escribe como $A^p_{,q}$.

8.53. Escriba la derivada covariante con respecto de x^q de cada uno de los tensores siguientes:

a) A_{jk}, *b)* A^{jk}, *c)* A^j_k, *d)* A^j_{kl}, *e)* A^{jkl}_{mn}.

Solución

a) $A_{jk,q} = \dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}A_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A_{js}$ *b)* $A^{jk}_{,q} = \dfrac{\partial A^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{js}$

c) $A^j_{k,q} = \dfrac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_k$ *d)* $A^j_{kl,q} = \dfrac{\partial A^j_{kl}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_{sl} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix}A^j_{ks} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_{kl}$

e) $A^{jkl}_{mn,q} = \dfrac{\partial A^{jkl}_{mn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{sn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^{jkl}_{ms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^{skl}_{mn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}A^{jsl}_{mn} + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}A^{jks}_{mn}$

8.54. Demuestre que las derivadas covariantes de las expresiones siguientes son igual a cero: *a)* g_{jk}, *b)* g^{jk} y *c)* δ^j_k.

Solución

a) $g_{jk,q} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix}g_{sk} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}g_{js} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq, k] - [kq, j] = 0$ según el problema 8.45*a*).

b) $g^{jk}_{,q} = \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}g^{sk} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix}g^{js} = 0$ según el problema 8.45*b*).

c) $\delta^j_{k,q} = \dfrac{\partial\delta^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}\delta^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}\delta^s_k = 0 - \begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} j \\ qk \end{Bmatrix} = 0.$

8.55. Encuentre la derivada covariante de $A^j_k B^{lm}_n$ con respecto de x^q.

Solución

$$\begin{aligned}\left(A^j_k B^{lm}_n\right)_{,q} &= \frac{\partial\left(A^j_k B^{lm}_n\right)}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_s B^{lm}_n - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}A^j_k B^{lm}_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_k B^{lm}_n + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}A^j_k B^{sm}_n + \begin{Bmatrix} m \\ qs \end{Bmatrix}A^j_k B^{ls}_n \\ &= \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix}A^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix}A^s_k\right)B^{lm}_n + A^j_k\left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix}B^{lm}_s + \begin{Bmatrix} l \\ qs \end{Bmatrix}B^{sm}_n + \begin{Bmatrix} m \\ qs \end{Bmatrix}B^{ls}_n\right) \\ &= A^j_{k,q}B^{lm}_n + A^j_k B^{lm}_{n,q}\end{aligned}$$

Esto ilustra el hecho de que las derivadas covariantes de un producto de tensores obedecen las reglas de las derivadas ordinarias del cálculo elemental para un producto.

8.56. Demuestre que $\left(g_{jk}A_n^{km}\right)_{,q} = g_{jk}A_{n,q}^{km}$.

Solución

$$\left(g_{jk}A_n^{km}\right)_{,q} = g_{jk,q}A_n^{km} + g_{jk}A_{n,q}^{km} = g_{jk}A_{n,q}^{km}$$

como $g_{jk,q} = 0$, de acuerdo con el problema 8.54*a*). En la diferenciación covariante, g_{jk}, g^{jk} y δ_k^j pueden ser tratados como constantes.

El gradiente, la divergencia y el rotacional en forma tensorial

8.57. Demuestre que $\operatorname{div} A^p = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$.

Solución

La divergencia de A^p es la contracción de la derivada covariante de A^p, es decir, la contracción de $A_{,q}^p$ o $A_{,p}^p$. Entonces, con el empleo del resultado del problema 8.45*c*),

$$\begin{aligned}\operatorname{div} A^p = A_{,p}^p &= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} p \\ pk \end{Bmatrix} A^k \\ &= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\ln\sqrt{g}\right)A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}\right)A^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)\end{aligned}$$

8.58. Demuestre que $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$.

Solución

El gradiente de Φ es grad $\Phi = \nabla\Phi = \partial\Phi/\partial x^r$, tensor covariante de rango uno (consulte el problema 8.6*b*) definido como la derivada covariante de Φ, y que se escribe así: $\Phi_{,r}$. El tensor covariante de rango uno asociado con $\Phi_{,r}$ es $A^k = g^{kr}\partial\Phi/\partial x^r$. Entonces, por el resultado del problema 8.57,

$$\nabla^2\Phi = \operatorname{div}\left(g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

8.59. Demuestre que $A_{p,q} - A_{q,p} = \dfrac{\partial A_p}{\partial x^q} - \dfrac{\partial A_q}{\partial x^p}$.

Solución

$$A_{p,q} - A_{q,p} = \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}A_s\right) - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \begin{Bmatrix} s \\ qp \end{Bmatrix}A_s\right) = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$$

Este tensor de rango dos se define como el rotacional de A_p.

8.60. Exprese la divergencia de un vector A^p en términos de sus componentes físicas para coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

Solución

a) Para coordenadas cilíndricas $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \text{ y } \sqrt{g} = \rho \text{ (vea el problema 8.30}a\text{)}$$

Las componentes físicas, denotadas por A_ρ, A_ϕ, A_z, están dadas por

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}}A^1 = A^1, \quad A_\phi = \sqrt{g_{22}}A^2 = \rho A^2 \quad \text{y} \quad A_z = \sqrt{g_{33}}A^3 = A^3$$

Entonces,

$$\text{div } A^p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}A^k\right) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right]$$

b) Para coordenadas esféricas, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ y $x^3 = \phi$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \operatorname{sen}^2 \theta \quad \text{y} \quad \sqrt{g} = r^2 \operatorname{sen}\, \theta \,\text{(consulte el problema 8.30}b\text{)}$$

Las componentes físicas, denotadas por A_r, A_θ, A_ϕ, están dadas por

$$A_r = \sqrt{g_{11}}A^1 = A^1, \quad A_\theta = \sqrt{g_{22}}A^2 = rA^2 \quad \text{y} \quad A_\phi = \sqrt{g_{33}}A^3 = r \operatorname{sen}\, \theta A^3$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\text{div } A^p &= \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) \\ &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r A_\phi)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\end{aligned}$$

8.61. Exprese el laplaciano de Φ, $\nabla^2\Phi$, en coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

Solución

a) En coordenadas cilíndricas, $g^{11} = 1$, $g^{22} = 1/\rho^2$, $g^{33} = 1$ (vea el problema 8.35*a*). Entonces, de acuerdo con el resultado del problema 8.58,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right) \\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

b) En coordenadas esféricas $g^{11} = 1$, $g^{22} = 1/r^2$, $g^{33} = 1/r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ (consulte el problema 8.35*b*). Por tanto,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right) \\ &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\,\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\,\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

Derivadas intrínsecas

8.62. Calcule las derivadas intrínsecas de cada uno de los tensores siguientes, si se suponen funciones diferenciables de t: *a*) un invariante Φ, *b*) A^j, *c*) A^j_k y *d*) A^{jk}_{lmn}.

Solución

a) $\dfrac{\delta\Phi}{\delta t} = \Phi_{,q}\dfrac{dx^q}{dt} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^q}\dfrac{dx^q}{dt} = \dfrac{d\Phi}{dt}$, la derivada ordinaria.

b)
$$\frac{\delta A^j}{\delta t} = A^j_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s \frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^j}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s \frac{dx^q}{dt}$$

c)
$$\frac{\delta A^j_k}{\delta t} = A^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_s + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_k\right)\frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^j_k}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_s \frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_k \frac{dx^q}{dt}$$

d)
$$\frac{\delta A^{jk}_{lmn}}{\delta t} = A^{jk}_{lmn,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{smn} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lsn}\right.$$
$$\left. - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{lmn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{lmn}\right)\frac{dx^q}{dt}$$
$$= \frac{dA^{jk}_{lmn}}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{smn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lsn}\frac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lms}\frac{dx^q}{dt}$$
$$+ \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{lmn}\frac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}$$

8.63. Pruebe que las derivadas intrínsecas de g_{jk}, g^{jk} y δ^j_k son iguales a cero.

Solución

$$\frac{\delta g_{jk}}{\delta t} = (g_{jk,q})\frac{dx^q}{dt} = 0, \quad \frac{\delta g^{jk}}{\delta t} = g^{jk}_{,q}\frac{dx^q}{dt} = 0, \quad \frac{\delta\delta^j_k}{\delta t} = \delta^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = 0,$$ según el resultado del problema 8.54.

Tensores relativos

8.64. Sean A^p_q y B^{rs}_t tensores relativos de pesos w_1 y w_2, respectivamente. Demuestre que sus productos interno y externo son tensores relativos de peso $w_1 + w_2$.

Solución

Por hipótesis,

$$\overline{A}^j_k = J^{w_1}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}A^p_q, \quad \overline{B}^{lm}_n = J^{w_2}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^n}B^{rs}_t$$

El producto externo es

$$\overline{A}^j_k\overline{B}^{lm}_n = J^{w_1+w_2}\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial\overline{x}^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^n}A^p_qB^{rs}_t$$

un tensor relativo de peso $w_1 + w_2$. Cualquier producto interno, que es una contracción del producto externo, también es un tensor relativo de peso $w_1 + w_2$.

8.65. Demuestre que $\sqrt{g}$ es un tensor relativo de peso uno, es decir: un tensor densidad.

Solución

Los elementos del determinante g dados por g_{pq} se transforman de acuerdo con $\overline{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} g_{pq}$.

Al obtener determinantes en ambos lados, $\overline{g} = \left|\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j}\right|\left|\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k}\right| g = J^2 g$ o $\sqrt{\overline{g}} = J\sqrt{g}$, lo que prueba que $\sqrt{g}$ es un tensor relativo de peso uno.

8.66. Demuestre que $dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^N$ es un invariante.

Solución

Según el problema 8.65,

$$d\overline{V} = \sqrt{\overline{g}}\, d\overline{x}^1 d\overline{x}^2 \cdots d\overline{x}^N = \sqrt{g} J\, d\overline{x}^1 d\overline{x}^2 \cdots d\overline{x}^N$$
$$= \sqrt{g}\left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right| d\overline{x}^1 d\overline{x}^2 \cdots d\overline{x}^N = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^N = dV$$

De esto se concluye que si Φ es un invariante, entonces,

$$\int \cdots \int_{\overline{V}} \overline{\Phi}\, d\overline{V} = \int \cdots \int_{V} \Phi\, dV$$

para cualesquiera sistemas de coordenadas en los que la integración se efectúe sobre un volumen en un espacio N dimensional. Es posible plantear un enunciado similar para las integrales de superficie.

Aplicaciones diversas

8.67. Exprese en forma tensorial lo siguiente: *a*) la velocidad y *b*) la aceleración de una partícula.

Solución

a) Si la partícula se mueve a lo largo de una curva $x^k = x^k(t)$ donde t es el parámetro tiempo, entonces $v^k = \frac{dx^k}{dt}$ es su velocidad y es un tensor contravariante de rango uno (consulte el problema 8.9).

b) La cantidad $\frac{dv^k}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2}$ en general no es un tensor, por lo que no puede representar la cantidad de aceleración física en todos los sistemas de coordenadas. Se define la aceleración a^k como la derivada intrínseca de la velocidad, que es $a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t}$ que es un tensor contravariante de rango uno.

8.68. Escriba la ley de Newton en forma tensorial.

Solución

Suponga que la masa M de la partícula es un invariante que no depende del tiempo t. Entonces, $Ma^k = F^k$, tensor contravariante de rango uno, se llama *fuerza* de la partícula. Así, la ley de Newton puede escribirse como:

$$F^k = Ma^k = M\frac{\delta v^k}{\delta t}$$

8.69. Pruebe que $a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$.

Solución

Como v^k es un tensor contravariante, según el problema 8.62*b*) se tiene que:

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{dv^k}{dt} + \left\{ {k \atop qs} \right\} v^s \frac{dx^q}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop qp} \right\} v^p \frac{dx^q}{dt} = \frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

8.70. Encuentre las componentes físicas de: *a*) la velocidad y *b*) la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas.

Solución

a) Del problema 8.67*a*), las componentes contravariantes de la velocidad son:

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

Entonces, las componentes físicas de la velocidad son:

$$\sqrt{g_{11}}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \sqrt{g_{22}}\frac{dx^2}{dt} = \rho\frac{d\phi}{dt} \quad \text{y} \quad \sqrt{g_{33}}\frac{dx^3}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

con el uso de $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$.

b) De los problemas 8.69 y 8.49*b*), las componentes contravariantes de la aceleración son

$$a^1 = \frac{d^2x^1}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{d^2x^2}{dt^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\phi}{dt}$$

y

$$a^3 = \frac{d^2x^3}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Entonces, las componentes físicas de la aceleración son:

$$\sqrt{g_{11}}a^1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad \sqrt{g_{22}}a^2 = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \quad \text{y} \quad \sqrt{g_{33}}a^3 = \ddot{z}$$

donde los puntos denotan diferenciaciones con respecto del tiempo.

8.71. Suponga que la energía cinética T de una partícula de masa, M, constante que se mueve con velocidad de magnitud v, está dada por $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$. Pruebe que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k$$

donde a_k denota las componentes covariantes de la aceleración.

Solución

Como $T = \frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} = Mg_{kq}\dot{x}^q \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) = M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} &= M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right) \\
&= M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right) \\
&= M(g_{kq}\ddot{x}^q + [pq, k]\dot{x}^p\dot{x}^q) \\
&= Mg_{kr}\left(\ddot{x}^r + \begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}\dot{x}^p\dot{x}^q\right) = Mg_{kr}a^r = Ma_k
\end{aligned}$$

con el empleo del problema 8.69. Este resultado puede usarse para expresar la aceleración en diferentes sistemas de coordenadas.

8.72. Utilice el problema 8.71 para encontrar las componentes físicas de la aceleración de una partícula en coordenadas cilíndricas.

Solución

Como $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2 + dz^2$, $v^2 = (ds/dt)^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$ y $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$ del problema 8.71, con $x^1 = \rho$, $x^2 = \phi$ y $x^3 = z$, encontramos que:

$$a_1 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad a_2 = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \quad a_3 = \ddot{z}$$

Entonces, las componentes físicas están dadas por

$$\frac{a_1}{\sqrt{g_{11}}}, \ \frac{a_2}{\sqrt{g_{22}}}, \ \frac{a_3}{\sqrt{g_{33}}} \quad \text{o} \quad \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}), \ \ddot{z}$$

ya que $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$ y $g_{33} = 1$. Compare este resultado con el del problema 8.70.

8.73. Suponga que la fuerza covariante que actúa sobre una partícula está dada por $F_k = -\dfrac{\partial V}{\partial x^k}$, donde $V(x^1, \ldots, x^N)$ es la energía potencial. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x^k} = 0$, donde $L = T - V$.

Solución

De $L = T - V$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}$, ya que V es independiente de $\dot{x}^k$. Entonces, del problema 8.71,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k = F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

La función L se llama *lagrangiano*. Las ecuaciones que involucran a L, llamadas *ecuaciones lagrangianas*, son importantes en la mecánica. Según el problema 8.50, se concluye que los resultados de este problema son equivalentes al enunciado de que una partícula se mueve en forma tal que $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ es un extremo. Esto se llama *principio de Hamilton*.

8.74. Exprese el teorema de divergencia en forma tensorial.

Solución

Sea que A^k defina un campo tensorial de rango uno, y ν_k denote el unitario normal a cualquier punto, dirigido hacia fuera de una superficie cerrada S que limita un volumen V. Entonces, el teorema de divergencia establece que

$$\iiint_V A^k_{,k}\, dV = \iint_S A^k \nu_k\, dS$$

Para un espacio N dimensional, la integral triple es reemplazada por una integral de orden N, y la integral doble por una de orden $N - 1$. El invariante $A^k_{,k}$ es la divergencia de A^k (consulte el problema 8.57). El invariante $A^k\nu_k$ es el producto escalar de A^k y ν_k, análogo a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ en la notación vectorial del capítulo 2.

Hemos expresado el teorema en forma tensorial; entonces, se cumple para todos los sistemas de coordenadas, ya que lo hace para sistemas rectangulares (vea el capítulo 6). También revise el problema 8.66.

8.75. Exprese en forma tensorial las ecuaciones de Maxwell: *a*) div $\mathbf{B} = 0$, *b*) div $\mathbf{D} = 4\pi\rho$,

c) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ y *d*) $\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi I}{c}$

Solución

Defina los tensores B^k, D^k, E_k, H_k, I^k y suponga que ρ y c son invariantes. Entonces, las ecuaciones pueden escribirse como sigue:

a) $B^k_{,k} = 0$ y *b*) $D^k_{,k} = 4\pi\rho$

c) $-\epsilon^{jkq}E_{k,q} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B^j}{\partial t}$ o bien $\epsilon^{jkq}E_{k,q} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B^j}{\partial t}$

d) $-\epsilon^{jkq}H_{k,q} = \dfrac{4\pi I^j}{c}$ o bien $\epsilon^{jkq}H_{k,q} = -\dfrac{4\pi I^j}{c}$

Estas ecuaciones forman la base de la *teoría electromagnética*.

8.76. *a*) Demuestre que $A_{p,qr} - A_{p,rq} = R^n_{pqr}A_n$, donde A_p es un tensor covariante arbitrario de rango uno. *b*) Demuestre que R^n_{pqr} es un tensor. *c*) Pruebe que $R_{pqrs} = g_{ns}R^n_{pqr}$ es un tensor.

Solución

a)
$$A_{p,qr} = (A_{p,q})_{,r} = \frac{\partial A_{p,q}}{\partial x^r} - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix} A_{j,q} - \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix} A_{p,j}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j\right) - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} k \\ jq \end{Bmatrix} A_k\right) - \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} l \\ pj \end{Bmatrix} A_l\right)$$
$$= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r \partial x^q} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j - \begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix}\frac{\partial A_j}{\partial x^r} - \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\frac{\partial A_j}{\partial x^q} + \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ jq \end{Bmatrix} A_k$$
$$- \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} j \\ qr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ pj \end{Bmatrix} A_l$$

Al intercambiar q y r y restar, encontramos que:

$$A_{p,qr} - A_{p,rq} = \begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ jq \end{Bmatrix} A_k - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j - \begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ jr \end{Bmatrix} A_k + \frac{\partial}{\partial x^q}\begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix} A_j$$
$$= \begin{Bmatrix} k \\ pr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix} A_j - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} A_j - \begin{Bmatrix} k \\ pq \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ kr \end{Bmatrix} A_j + \frac{\partial}{\partial x^q}\begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix} A_j$$
$$= R^j_{pqr}A_j$$

donde

$$R^j_{pqr} = \begin{Bmatrix} k \\ pr \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ kq \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} j \\ pq \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k \\ pq \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j \\ kr \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^q}\begin{Bmatrix} j \\ pr \end{Bmatrix}$$

Se llega al resultado al sustituir j por n.

b) Como $A_{p,qr} - A_{p,rq}$ es un tensor, $R^n_{pqr}A_n$ es un tensor; y como A_n es un tensor arbitrario, según la ley del cociente R^n_{pqr} es un tensor. Este tensor se denomina tensor de *Riemann-Christoffel*, y en ocasiones se escribe como $R^n_{.pqr}$, $R^{...n}_{pqr.}$, o simplemente R^n_{pqr}.

c) $R_{pqrs} = g_{ns}R^n_{pqr}$ es un tensor asociado de R^n_{pqr} por lo que es un tensor. Se llama *tensor covariante de curvatura* y tiene importancia capital en la *teoría general de la relatividad de Einstein*.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

8.77. Escriba cada una de las expresiones siguientes con el uso de la convención de la suma.

a) $a_1x^1x^3 + a_2x^2x^3 + \cdots + a_Nx^Nx^3$

b) $A^{21}B_1 + A^{22}B_2 + A^{23}B_3 + \cdots + A^{2N}B_N$

c) $A^j_1B^1 + A^j_2B^2 + A^j_3B^3 + \cdots + A^j_NB^N$

d) $g^{21}g_{11} + g^{22}g_{21} + g^{23}g_{31} + g^{24}g_{41}$

e) $B^{121}_{11} + B^{122}_{12} + B^{221}_{21} + B^{222}_{22}$

8.78. Escriba los términos de cada una de las sumas indicadas a continuación.

a) $\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$, $N = 3$ *b*) $A^{jk}B^p_kC_j$, $N = 2$ *c*) $\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$

8.79. ¿Qué lugar geométrico representa $a_kx^kx^k = 1$, donde x^k, $k = 1, 2, \ldots, N$ son coordenadas rectangulares, a_k son constantes positivas, y $N = 2$, 3 o 4?

8.80. Sea $N = 2$. Escriba el sistema de ecuaciones representado por $a_{pq}x^q = b_p$.

8.81. Escriba la ley de transformación para los tensores *a*) A_k^{ij}, *b*) B_m^{ijk}, *c*) C_{mn}, *d*) A_m.

8.82. Suponga que las cantidades $B(j, k, m)$ y $C(j, k, m, n)$ se transforman de un sistema de coordenadas x^i a otro $\bar{x}^i$ de acuerdo con las reglas siguientes

a) $\overline{B}(p, q, r) = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}B(j, k, m)$ *b*) $\overline{C}(p, q, r, s) = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n}C(j, k, m, n)$. Determine si son tensores. Si lo son, escríbalos con una notación apropiada y diga el rango y los órdenes covariante y contravariante.

8.83. ¿Cuántas componentes tiene un tensor de rango 5 en un espacio de 4 dimensiones?

8.84. Demuestre que si las componentes de un tensor son cero en un sistema de coordenadas, entonces son iguales a cero en todos los sistemas coordenados.

8.85. Demuestre que si las componentes de dos tensores son iguales en un sistema de coordenadas, son iguales en todos los sistemas.

8.86. Haga la demostración de que la velocidad, $dx^k/dt = v^k$, de un fluido es un tensor, pero que dv^k/dt no lo es.

8.87. Encuentre las componentes covariantes y contravariantes de un tensor en coordenadas: *a*) cilíndricas ρ, ϕ, z, *b*) esféricas, r, θ, ϕ, si sus componentes covariantes en coordenadas rectangulares son $2x - z$, x^2y, yz.

8.88. Las componentes contravariantes de un tensor en coordenadas rectangulares son yz, 3, $2x + y$. Encuentre sus componentes covariantes en coordenadas parabólicas cilíndricas.

8.89. Evalúe *a*) $\delta_q^p B_p^{rs}$, *b*) $\delta_q^p \delta_s^r A^{qs}$, *c*) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r$ y *d*) $\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s$.

8.90. Suponga que A_r^{pq} es un tensor. Demuestre que A_r^{pr} es un tensor contravariante de rango uno.

8.91. Demuestre que $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ no es un tensor covariante, como pareciera indicarlo la notación.

8.92. Sea $\overline{A}_p = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}A_q$. Demuestre que $A_q = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\overline{A}_p$.

8.93. Sea $\overline{A}_r^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r}A_s^q$. Demuestre que $A_s^q = \dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\overline{A}_r^p$.

8.94. Suponga que Φ es un invariante. Determine si $\partial^2\Phi/\partial x^p \partial x^q$ es un tensor.

8.95. Sean A_q^p y B_r tensores, pruebe que $A_q^p B^r$ y $A_q^p B^q$ son tensores y determine el rango de cada uno.

8.96. Suponga que A_{rs}^{pq} es un tensor. Demuestre que $A_{rs}^{pq} + A_{sr}^{qp}$ es un tensor simétrico, y que $A_{rs}^{pq} - A_{sr}^{qp}$ es un tensor simétrico oblicuo.

8.97. Suponga que A^{pq} y B_{rs} son tensores simétricos oblicuos. Demuestre que $C_{rs}^{pq} = A^{pq}B_{rs}$ es simétrico.

8.98. Suponga un tensor simétrico (simétrico oblicuo). ¿Las contracciones repetidas del tensor también son simétricas (simétricas oblicuas)?

8.99. Pruebe que $A_{pq}x^p x^q = 0$ si A_{pq} es un tensor simétrico oblicuo.

8.100. ¿Cuál es el número más grande de componentes diferentes que un tensor simétrico contravariante de rango dos puede tener cuando: *a*) $N = 4$ y *b*) $N = 6$? ¿Cuál es el número para cualquier valor de N?

8.101. ¿Cuántas componentes distintas de cero, además de una diferencia en el signo, tiene un tensor simétrico oblicuo, covariante y de tercer rango?

8.102. Suponga que A_{rs}^{pq} es un tensor. Demuestre que una contracción doble genera un invariante.

8.103. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que un tensor de rango R sea un invariante por contracción repetida es que R sea par y que el número de índices covariantes y contravariantes sea igual a $R/2$.

8.104. Dados los tensores A_{pq} y B^{rs}, demuestre que el producto externo es un tensor de rango cuatro, y que pueden formarse dos productos internos de rango dos y cero, respectivamente.

8.105. Sea $A(p, q)B_q = C^p$, donde B_q es un tensor covariante arbitrario de rango uno, y C^p es un tensor contravariante de rango uno. Demuestre que $A(p, q)$ debe ser un tensor contravariante de rango dos.

8.106. Sean A^p y B_q tensores arbitrarios. Demuestre que si $A^pB_qC(p, q)$ es un invariante, entonces $C(p, q)$ es un tensor que puede escribirse como C_p^q.

8.107. Encuentre la suma $S = A + B$, la diferencia $D = A - B$, y los productos $P = AB$ y $Q = BA$, donde A y B son las matrices siguientes:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, *b*) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

8.108. Encuentre $(3A - 2B)(2A - B)$, donde A y B son las matrices del problema anterior.

8.109. *a*) Verifique que $\det(AB) = \{\det A\}\{\det B\}$ para las matrices del problema 8.107.

b) ¿Se cumple que $\det(AB) = \det(BA)$?

8.110. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Demuestre que: *a*) AB está definido y calcúlelo, *b*) BA y $A + B$ no están definidos.

8.111. Encuentre x, y y z de modo que $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

8.112. La inversa de una matriz cuadrada A, que se escribe A^{-1}, está definida por la ecuación $AA^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad que tiene unos en su diagonal principal y ceros en todos los demás elementos.

Obtenga A^{-1}, si *a*) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$, *b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. ¿Es $A^{-1}A = I$ en estos casos?

8.113. Pruebe que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ no tiene inversa.

8.114. Pruebe que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, donde A y B son matrices cuadradas no singulares.

8.115. Exprese con notación matricial las ecuaciones de transformación para: *a*) un vector contravariante, *b*) un tensor covariante de rango dos y *c*) un tensor mixto de rango dos.

8.116. Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, determine los valores de la constante λ de modo que $AX = \lambda X$, para cierta matriz X diferente de cero (y que depende de λ). Estos valores de λ se llaman *valores característicos* o *eigenvalores* (o valores propios) de la matriz A.

8.117. La ecuación $F(\lambda) = 0$ del problema anterior, para determinar los valores característicos de la matriz A se llama *ecuación característica* de A. Demuestre que $F(A) = O$, donde $F(A)$ es la matriz que obtenemos al sustituir λ por A en la ecuación característica, y donde el término constante c es reemplazado por la matriz cI, y O es una matriz cuyos elementos son cero (y se llama *matriz nula*). El resultado es un caso especial del *teorema de Hamilton y Cayley*, que dice que una matriz satisface su propia ecuación característica.

8.118. Demuestre que $(AB)^T = B^TA^T$.

8.119. Determine el tensor métrico y el tensor métrico conjugado en coordenadas: *a*) cilíndricas parabólicas y *b*) cilíndricas elípticas.

8.120. Considere la transformación $\bar{x}^r = a_p^r x^p + b^r$, donde a^r_p y b^r son constantes tales que $a_r^p a_q^r = \delta_q^p$. Pruebe que no hay diferencia entre las componentes covariantes y contravariantes de un tensor. En el caso especial en el que las transformaciones son de un sistema de coordenadas rectangulares a otro, los tensores se llaman *tensores cartesianos*.

8.121. Determine g y g^{jk} que corresponden a $ds^2 = 3(dx^1)^2 + 2(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 6(dx^1dx^3)$.

8.122. Sea $A^k = g^{jk}A_j$. Demuestre que $A_j = g_{jk}A^k$ y a la inversa.

8.123. Exprese la relación entre los tensores asociados

a) A^{pq} y $A_j^{\cdot q}$, *b*) $A^{p\cdot r}_{\cdot q}$ y A_{jql} y *c*) $A^{\cdot\cdot r}_{pq}$ y $A^{jk}_{\cdot\cdot l}$.

8.124. Demuestre que *a*) $A_p^{\cdot q}B^p_{\cdot rs} = A^{pq}B_{prs}$ y *b*) $A^{pq}_{\cdot\cdot r}B_p^{\cdot r} = A^{\cdot q}_{p\cdot r}B^{pr} = A_p^{\cdot qr}B^p_{\cdot r}$. Esto demuestra el resultado general de que un símbolo mudo en un término puede bajarse de su posición superior, o bien subirse de su posición inferior, sin cambiar el valor del término.

8.125. Demuestre que si $A^p_{\cdot qr} = B^p_{\cdot q}C_r$, entonces $A_{pqr} = B_{pq}C_r$ y $A_p^{\cdot qr} = B_p^{\cdot q}C^r$. Esto demuestra el resultado de que un índice libre en una ecuación tensorial puede subirse o bajarse sin que se afecte la validez de la ecuación.

8.126. Demuestre que los tensores g_{pq}, g^{pq} y δ^p_q son tensores asociados.

8.127. Pruebe que *a*) $\bar{g}_{jk}\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} = g_{pq}\dfrac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}$ y *b*) $\bar{g}^{jk}\dfrac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = g^{pq}\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}$.

8.128. Sea A^p un campo vectorial. Encuentre el vector unitario correspondiente.

8.129. Demuestre que los cosenos de los ángulos que forma el vector unitario tridimensional U^i con las curvas coordenadas están dados por $\dfrac{U_1}{\sqrt{g_{11}}}$, $\dfrac{U_2}{\sqrt{g_{22}}}$ y $\dfrac{U_3}{\sqrt{g_{33}}}$.

8.130. Determine los símbolos de Christoffel del primer y segundo tipo, en coordenadas: *a*) rectangulares, *b*) cilíndricas y *c*) esféricas.

8.131. Determine los símbolos de Christoffel de los tipos primero y segundo, en coordenadas: *a*) cilíndricas parabólicas y *b*) cilíndricas elípticas.

8.132. Encuentre ecuaciones diferenciales para las geodésicas, en coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

8.133. Demuestre que las geodésicas en un plano son líneas rectas.

8.134. Pruebe que las geodésicas en una esfera son arcos de círculos máximos.

8.135. Escriba los símbolos de Christoffel del segundo tipo para la métrica

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \left[(x^2)^2 - (x^1)^2\right](dx^2)^2$$

y las ecuaciones geodésicas correspondientes.

8.136. Escriba la derivada covariante con respecto de x^q de cada uno de los tensores siguientes:

a) A^{jk}_l, *b*) A^{jk}_{lm}, *c*) A^j_{klm}, *d*) A^{jkl}_m y *e*) A^{jk}_{lmn}.

8.137. Encuentre la derivada covariante de: *a*) $g_{jk}A^k$, *b*) A^jB_k y *c*) $\delta^j_kA_j$, con respecto de x^q.

8.138. Use la relación $A^j = g^{jk}A_k$ para obtener la derivada covariante de A^j desde la derivada covariante de A_k.

8.139. Suponga que Φ es un invariante. Pruebe que $\Phi_{,pq} = \Phi_{,qp}$; es decir, el orden de diferenciación covariante de un invariante es irrelevante.

8.140. Demuestre que ϵ_{pqr} y ϵ^{pqr} son tensores covariante y contravariante, respectivamente.

8.141. Exprese la divergencia de un vector A^p en términos de sus componentes físicas, para coordenadas: *a*) cilíndricas parabólicas y *b*) paraboloides.

8.142. Encuentre las componentes físicas de grad Φ en coordenadas: *a*) cilíndricas parabólicas y *b*) cilíndricas elípticas.

8.143. Determine $\nabla^2\Phi$ en coordenadas cilíndricas parabólicas.

8.144. Con el empleo de notación tensorial, demuestre que: *a*) div rot $A^r = 0$ y *b*) rot grad $\Phi = 0$.

8.145. Calcule las derivadas intrínsecas de los campos tensoriales siguientes, con la suposición de que son funciones diferenciables de t:

a) A_k, *b*) A^{jk}, *c*) A_jB^k y *d*) ϕA_k^j, donde ϕ es un invariante.

8.146. Encuentre la derivada intrínseca de *a*) $g_{jk}A^k$, *b*) $\delta_k^j A_j$ y *c*) $g_{jk}\delta_r^j A_p^r$.

8.147. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}(g^{pq}A_pA_q) = 2g^{pq}A_p\dfrac{\delta A_q}{\delta t}$.

8.148. Muestre que si no actúan fuerzas externas, una partícula con masa constante se mueve a lo largo de una geodésica dada por

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^p}{ds}\right) = 0.$$

8.149. Pruebe que la suma y resta de dos tensores relativos de los mismos peso y tipo también son un tensor relativo del mismo peso y tipo.

8.150. Suponga que A_r^{pq} es un tensor relativo de peso w. Pruebe que $g^{-w/2}A_r^{pq}$ es un tensor absoluto.

8.151. Sea $A(p, q)B_r^{qs} = C_{pr}^s$, donde B_r^{qs} es un tensor relativo arbitrario de peso w_1 y C_{pr}^s es un tensor relativo conocido de peso w_2. Demuestre que $A(p, q)$ es un tensor relativo de peso $w_2 - w_1$. Éste es un ejemplo de la ley del cociente para tensores relativos.

8.152. Demuestre que la cantidad $G(j, k)$ del problema resuelto 8.31 es un tensor relativo de peso dos.

8.153. Encuentre las componentes físicas en coordenadas esféricas de: *a*) la velocidad y *b*) la aceleración de una partícula.

8.154. Sean A^r y B^r dos vectores en el espacio tridimensional. Demuestre que si λ y μ son constantes, entonces $C^r = \lambda A^r + \mu B^r$ es un vector que está en el plano de A^r y B^r. ¿Cuál es la interpretación en un espacio de mayor dimensión?

8.155. Demuestre que un vector normal a la superficie $\phi(x^1, x^2, x^3) =$ constante está dado por $A^p = g^{pq}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^q}$. Encuentre la normal unitaria correspondiente.

8.156. La ecuación de continuidad está dada por $\nabla\cdot(\sigma v) + \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$ donde σ es la densidad y v es la velocidad de un fluido. Exprese la ecuación en forma tensorial.

8.157. Exprese la ecuación de continuidad en coordenadas: *a*) cilíndricas y *b*) esféricas.

8.158. Exprese el teorema de Stokes en forma tensorial.

8.159. Pruebe que el tensor de curvatura covariante R_{pqrs} es simétrico oblicuo en: *a*) p y q, *b*) r y s y *c*) q y s.

8.160. Pruebe que $R_{pqrs} = R_{rspq}$.

8.161. Demuestre que *a*) $R_{pqrs} + R_{psqr} + R_{prsq} = 0$ y *b*) $R_{pqrs} + R_{rqps} + R_{rspq} + R_{psrq} = 0$.

8.162. Pruebe que la diferenciación covariante en un espacio euclidiano es conmutativa. Esto demuestra que el tensor de Riemann-Christoffel y el tensor de curvatura son iguales a cero en un espacio euclidiano.

8.163. Sea $T^p = \dfrac{dx^p}{ds}$ el vector tangente a la curva C cuya ecuación es $x^p = x^p(s)$, donde s es la longitud de arco. *a*) Demuestre que $g_{pq}T^pT^q = 1$. *b*) Pruebe que $g_{pq}T^p\dfrac{\delta T^q}{\delta s} = 0$ lo que demuestra que $N^q = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\delta T^q}{\delta s}$ es una normal unitaria a C para una κ apropiada. *c*) Demuestre que $\dfrac{\delta N^q}{\delta s}$ es ortogonal a N^q.

8.164. Con la notación del problema anterior, demuestre que:

a) $g_{pq}T^pN^q = 0$, *b*) $g_{pq}T^p\dfrac{\delta N^q}{\delta s} = -\kappa$ o $g_{pq}T^p\left(\dfrac{\delta N^q}{\delta s} + \kappa T^q\right) = 0$.

Lo que prueba que $B^r = \dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{\delta N^r}{\delta s} + \kappa T^r\right)$ es un vector unitario para una τ apropiada y ortogonal tanto a T^p como a N^q.

8.165. Demuestre las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\frac{\delta T^p}{\delta s} = \kappa N^p, \qquad \frac{\delta N^p}{\delta s} = \tau B^p - \kappa T^p, \qquad \frac{\delta B^p}{\delta s} = -\tau N^p$$

donde T^p, N^p y B^p son los vectores unitarios tangente, normal y binormal a C, y κ y τ son la curvatura y torsión de C.

8.166. Demuestre que $ds^2 = c^2(dx^4)^2 - dx^k dx^k$ $(N = 3)$ es invariante bajo la transformación lineal (afín):

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - vx^4), \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \quad \bar{x}^4 = \gamma\left(x^4 - \frac{\beta}{c}x^1\right)$$

donde γ, β, c y v son constantes, $\beta = v/c$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Ésta es la *transformada de Lorentz*, de la relatividad especial. Físicamente, un observador en el origen del sistema x^i ve que un evento ocurre en la posición x^1, x^2, x^3 en el instante x^4, mientras que un observador en el origen del sistema $\bar{x}^i$ mira que el mismo evento sucede en la posición $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ en el instante $\bar{x}^4$. Se supone que: 1) en los dos sistemas coinciden los ejes x^1 y $\bar{x}^1$, 2) los ejes positivos x^2 y x^3 son paralelos respectivamente a los ejes positivos $\bar{x}^2$ y $\bar{x}^3$, 3) el sistema $\bar{x}^i$ se mueve con una velocidad v relativa al sistema x^i y 4) la velocidad de la luz, c, es constante.

8.167. Demuestre que para un observador fijo en el sistema $x^i(\bar{x}^i)$, una barra fija en el sistema $\bar{x}^i(x^i)$ que esté paralela al eje $\bar{x}^1(x^1)$ y que tenga una longitud L, en este sistema parece tener la longitud reducida $L\sqrt{1-\beta^2}$. Este fenómeno se llama *contracción de Lorentz-Fitzgerald*.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

8.77. *a)* $a_k x^k x^3$ *b)* $A^{2j}B_j$ *c)* $A^j_k B^k$ *d)* $g^{2q}g_{q1}, N = 4$ y *e)* $B^{p2r}_{pr}, N = 2$

8.78. *a)* $\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}A^3)$ *b)* $A^{11}B^p_1 C_1 + A^{21}B^p_1 C_2 + A^{12}B^p_2 C_1 + A^{22}B^p_2 C_2$

c) $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^m} + \cdots + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^N}\frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^m}$

8.79. Elipse para $N = 2$, elipsoide para $N = 3$, hiperelipsoide para $N = 4$.

8.80. $\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 = b_2 \end{cases}$

8.81. *a)* $\bar{A}^{pq}_r = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}A^{ij}_k$ *b)* $\bar{B}^{pqr}_s = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s}B^{ijk}_m$ *c)* $\bar{C}_{pq} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^q}C_{mn}$ y *d)* $\bar{A}_p = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}A_m$

8.82. *a) B*(j, k, m) es un tensor de rango tres y es covariante de orden dos y contravariante de orden uno. Si puede escribirse como B^m_{jk}. *b) C*(j, k, m, n) no es un tensor.

8.83. $4^5 = 1024$

8.87. *a)* $2\rho\cos^2\phi - z\cos\phi + \rho^3\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi$, $-2\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \rho z\operatorname{sen}\phi + \rho^4\operatorname{sen}\phi\cos^3\phi$, $\rho z\operatorname{sen}\phi$

b) $2r\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi + r^3\operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi + r^2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\operatorname{sen}\phi$,

$2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\phi - r^2\cos^2\theta\cos\phi + r^4\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi - r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi$,

$-2r^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\cos\phi + r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi + r^4\operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}\phi\cos^3\phi$

8.88. $u^2vz + 3v$, $3u - uv^2z$, $u^2 + uv - v^2$

8.89. *a)* B^{rs}_q, *b)* A^{pr}, *c)* δ^p_s, *d)* N

8.94. No es un tensor.

8.95. Rango tres y rango uno, respectivamente.

8.98. Sí.

8.100. *a)* 10, *b)* 21 y *c)* $N(N+1)/2$

8.101. $N(N-1)(N-2)/6$

8.107. *a*) $S = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$

b) $S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -9 & -7 & 10 \\ 9 & 9 & -16 \end{bmatrix},$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 8 & -16 & 11 \\ -2 & 10 & -7 \end{bmatrix}$

8.108. *a*) $\begin{bmatrix} -52 & -86 \\ 104 & 76 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 3 & -16 & 20 \\ 9 & 163 & -136 \\ -61 & -135 & 132 \end{bmatrix}$ 8.110. $\begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -4 & 17 & -2 \end{bmatrix}$

8.111. $x = -1, y = 3, z = 2$ **8.112.** *a*) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sí

8.115. *a*)
$$\begin{bmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix}$$

8.116. $\lambda = 4, -1$

8.119. *a*)
$$\begin{bmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{u^2 + v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.121. $g = 6, \ (g^{jk}) = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.123. *a*) $A^{pq} = g^{pj}A_j^{\cdot q}$, *b*) $A_{\cdot q}^{p\cdot r} = g^{pj}g^{rl}A_{jql}$, *c*) $A_{pq}^{\cdot\cdot r} = g_{pj}g_{qk}g^{rl}A_{\cdot\cdot l}^{jk}$

8.128. $\dfrac{A^p}{\sqrt{A^pA_p}}$ o $\dfrac{A^p}{\sqrt{g_{pq}A^pA^q}}$

8.130. *a*) Todos son cero. *b*) $[22, 1] = -\rho$, $[12, 2] = [21, 2] = \rho$. Todos los demás son cero.

c) $[22, 1] = -r$, $[33, 1] = -r\,\text{sen}^2\,\theta$, $[33, 2] = -r^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$[21, 2] = [12, 2] = r$, $[31, 3] = [13, 3] = r\,\text{sen}^2\,\theta$

$[32, 3] = [23, 3] = r^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta.$ Todos los demás son cero.

8.131. *a*) $[11, 1] = u$, $[22, 2] = v$, $[11, 2] = -v$, $[22, 1] = -u$,
$[12, 1] = [21, 1] = v$, $[21, 2] = [12, 2] = u$:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{u}{u^2+v^2}, \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{v}{u^2+v^2}, \left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{-u}{u^2+v^2}, \left\{ {2 \atop 11} \right\} = \frac{-v}{u^2+v^2},$$

$$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{v}{u^2+v^2}, \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{u}{u^2+v^2}.$$ Todos los demás son cero.

b) $[11, 1] = 2a^2\,\text{senh}\,u\cosh u$, $[22, 2] = 2a^2\,\text{sen}\,v\cos v$, $[11, 2] = -2a^2\,\text{sen}\,v\cos v$

$[22, 1] = -2a^2\,\text{senh}\,u\cosh u$, $[12, 1] = [21, 1] = 2a^2\,\text{sen}\,v\cos v$, $[21, 2] = [12, 2] = 2a^2\,\text{senh}\,u\cosh u$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{\text{senh}\,u\cosh u}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v}, \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{\text{sen}\,v\cos v}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v}, \left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{-\text{senh}\,u\cosh u}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v},$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \frac{-\text{sen}\,v\cos v}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v}, \left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{\text{sen}\,v\cos v}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v},$$

$$\left\{ {2 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{\text{senh}\,u\cosh u}{\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v}.$$ Todos los demás son cero.

8.132. *a*) $\dfrac{d^2\rho}{ds^2} - \rho\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$, $\dfrac{d^2\phi}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} = 0$, $\dfrac{d^2z}{ds^2} = 0$

b) $\dfrac{d^2r}{ds^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\,\text{sen}^2\,\theta\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$, $\dfrac{d^2\theta}{ds^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} - \text{sen}\,\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$

$\dfrac{d^2\phi}{ds^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta\dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} = 0$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = x^1, \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}, \left\{ {2 \atop 22} \right\} = \frac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}.$$ Todos los demás son cero.

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0, \frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2x^1}{(x^1)^2-(x^2)^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2}\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

8.136. *a*) $A_{l,q}^{jk} = \dfrac{\partial A_l^{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A_s^{jk} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A_l^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A_l^{js}$

b) $A_{lm,q}^{jk} = \dfrac{\partial A_{lm}^{jk}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A_{sm}^{jk} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A_{ls}^{jk} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A_{lm}^{sk} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A_{lm}^{js}$

c) $A_{klm,q}^{j} = \dfrac{\partial A_{klm}^{j}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop kq} \right\} A_{slm}^{j} - \left\{ {s \atop lq} \right\} A_{ksm}^{j} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A_{kls}^{j} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A_{klm}^{s}$

d) $A_{m,q}^{jkl} = \dfrac{\partial A_m^{jkl}}{\partial x^q} - \left\{ {s \atop mq} \right\} A_s^{jkl} + \left\{ {j \atop qs} \right\} A_m^{skl} + \left\{ {k \atop qs} \right\} A_m^{jsl} + \left\{ {l \atop qs} \right\} A_m^{jks}$

e) $A^{jk}_{lmn,q} = \dfrac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ lq \end{Bmatrix} A^{jk}_{smn} - \begin{Bmatrix} s \\ mq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lsn} - \begin{Bmatrix} s \\ nq \end{Bmatrix} A^{jk}_{lms} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}_{lmn} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}_{lmn}$

8.137. *a*) $g_{jk}A^k_{,q}$, *b*) $A^j_{,q}B_k + A^j B_{k,q}$, *c*) $\delta^j_k A_{j,q}$

8.141. *a*) $\dfrac{1}{u^2+v^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}A_u) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}A_v)\right] + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

b) $\dfrac{1}{uv(u^2+v^2)}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}(uv\sqrt{u^2+v^2}A_u) + \dfrac{\partial}{\partial v}(uv\sqrt{u^2+v^2}A_v)\right] + \dfrac{1}{uv}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$

8.142. *a*) $\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathbf{e}_u + \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathbf{e}_v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$

a) $\dfrac{1}{a\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + \operatorname{sen}^2 v}}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathbf{e}_u + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathbf{e}_v\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$

donde $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ y $\mathbf{e}_z$ son vectores unitarios en las direcciones en que se incrementan u, v y z, respectivamente.

8.143. $\dfrac{1}{u^2+v^2}\left[\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\Phi\right]$

8.145. *a*) $\dfrac{\delta A_k}{\delta t} = A_{k,\,q}\dfrac{dx^q}{dt} = \left(\dfrac{\partial A_k}{\partial x^q} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A_s\right)\dfrac{dx^q}{dt} = \dfrac{dA_k}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A_s \dfrac{dx^q}{dt}$

b) $\dfrac{\delta A^{jk}}{\delta t} = \dfrac{dA^{jk}}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^{sk}\dfrac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^{js}\dfrac{dx^q}{dt}$

c) $\dfrac{\delta}{\delta t}(A_j B^k) = \dfrac{\delta A_j}{\delta t}B^k + A_j\dfrac{\delta B^k}{\delta t} = \left(\dfrac{dA_j}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix} A_s \dfrac{dx^q}{dt}\right)B^k + A_j\left(\dfrac{dB^k}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} B^s \dfrac{dx^q}{dt}\right)$

d) $\dfrac{\delta}{\delta t}(\Phi A^j_k) = \Phi\dfrac{\delta A^j_k}{\delta t} + \dfrac{\delta \Phi}{\delta t}A^j_k = \Phi\left(\dfrac{dA^j_k}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ qs \end{Bmatrix} A^s_k \dfrac{dx^q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A^j_s \dfrac{dx^q}{dt}\right) + \dfrac{d\Phi}{dt}A^j_k$

8.146. *a*) $g_{jk}\dfrac{\delta A^k}{\delta t} = g_{jk}\left(\dfrac{dA^k}{dt} + \begin{Bmatrix} k \\ qs \end{Bmatrix} A^s \dfrac{dx^q}{dt}\right)$

b) $\delta^j_k\dfrac{\delta A_j}{\delta t} = \delta^j_k\left(\dfrac{dA_j}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ jq \end{Bmatrix} A_s \dfrac{dx^q}{dt}\right) = \dfrac{dA_k}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ kq \end{Bmatrix} A_s \dfrac{dx^q}{dt}$

c) $g_{jk}\delta^j_r\dfrac{\delta A^r_p}{\delta t} = g_{rk}\left(\dfrac{dA^r_p}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} A^r_s \dfrac{dx^q}{dt} + \begin{Bmatrix} r \\ qs \end{Bmatrix} A^s_p \dfrac{dx^q}{dt}\right)$

8.153. *a*) $\dot{r},\ r\dot{\theta},\ r\operatorname{sen}\theta\dot{\phi}$ *b*) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2,\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\phi}^2,\ \dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi})$

8.156. $\dfrac{\partial(\sigma v^q)}{\partial x^q} + \dfrac{\sigma v^q}{2g}\dfrac{\partial g}{\partial x^q} + \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, donde v^q son las componentes contravariantes de la velocidad.

8.157. *a*) $\dfrac{\partial}{\partial \rho}(\sigma v^1) + \dfrac{\partial}{\partial \phi}(\sigma v^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\sigma v^3) + \dfrac{\sigma v^1}{\rho} + \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$

b) $\dfrac{\partial}{\partial r}(\sigma v^1) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sigma v^2) + \dfrac{\partial}{\partial \phi}(\sigma v^3) + \sigma\left(\dfrac{2v^1}{r} + v^2\cot\theta\right) + \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, donde v^1, v^2 y v^3 son las componentes contravariantes de la velocidad.

8.158. $\displaystyle\int_C A_p\frac{dx^p}{ds}\,ds = -\iint_S \epsilon^{pqr}A_{q,r}v_p\,dS$, donde $\dfrac{dx^p}{ds}$ es el vector unitario tangente a la curva cerrada C y v^p es el unitario normal a la superficie S, que tiene como frontera a C.

ÍNDICE